



TUGAS AKHIR - SM141501

**ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI
MUNDUR PADA MODEL INFEKSI VIRUS
HEPATITIS B DAN C PADA TUBUH PASIEN**

MUHAMMAD MUSA
NRP 1211 100 070

Dosen Pembimbing:
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT - SM141501

**STABILITY ANALYSIS AND BACKWARD
BIFURCATION IN A MODEL INFECTIOUS OF
HEPATITIS B AND C VIRUSES IN PATIENT
BODY**

MUHAMMAD MUSA
NRP 1211 100 070

Supervisors:
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN


**ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI MUNDUR
PADA MODEL INFEKSI VIRUS HEPATITIS B DAN C
PADA TUBUH PASIEN**

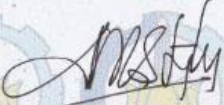
***STABILITY ANALYSIS AND BACKWARD
BIFURCATION IN A MODEL INFECTIOUS OF
HEPATITIS B AND C VIRUSES IN PATIENT BODY***

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

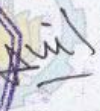
Oleh:
MUHAMMAD MUSA
NRP. 1211 100 070

Dosen Pembimbing II, Dosen Pembimbing I,


Drs. Lukman Hanafi, M.Sc
NIP. 19640624 198803 1 001


Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
NIP. 19640920 199002 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS


Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001
JURUSAN
MATEMATIKA
Surabaya, Juli 2015



ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI MUNDUR PADA MODEL INFEKSI VIRUS HEPATITIS B DAN C PADA TUBUH PASIEN

Nama Mahasiswa : Muhammad Musa
NRP : 1211 100 070
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstrak

Penyakit hepatitis merupakan penyakit yang menyerang hati manusia disebabkan oleh virus hepatitis, antara lain virus Hepatitis B dan C . Tugas Akhir ini membahas tentang analisis pada model infeksi virus hepatitis B dan C pada tubuh pasien atau penderita dengan menyelidiki adanya kestabilan dari setiap titik kesetimbangan, kestabilan global pada titik kesetimbangan bebas penyakit, menentukan bilangan reproduksi dasar, bifurkasi, dan solusi numerik dari model dinamik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan simulasinya. Hasil analisis menunjukkan adanya kestabilan pada setiap titik kesetimbangan, kestabilan global pada titik kesetimbangan bebas penyakit, dan bifurkasi mundur dalam model. Adanya bifurkasi mundur disebabkan ketidakefektifan pengobatan transplantasi hati sehingga masih terdapat titik kesetimbangan endemik pada saat bilangan reproduksi dasar kurang dari 1. Sedangkan dari simulasi numerik dengan Metode Runge Kutta orde empat diperoleh grafik kestabilan yang akurat dengan error kecil dari setiap titik kesetimbangan berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar.

Kata-kunci: Model epidemik, Bifurkasi Mundur, Bilangan Reproduksi Dasar, Metode Runge-Kutta orde

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

STABILITY ANALYSIS AND BACKWARD BIFURCATION IN A MODEL INFECTIOUS OF HEPATITIS B AND C VIRUSES IN PATIENT BODY

Name : Muhammad Musa
NRP : 1211 100 070
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors : 1. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstract

Hepatitis is a disease which attack human liver because of hepatitis virus. Two types of Hepatitis virus are Hepatitis B and C. This final project explain the analysis on model infectious hepatitis B and C virus in patient body to investigate the stability of each equilibrium point, global stability of disease free equilibrium, determine the basic reproduction number, bifurcation, and numerical solution of the dynamic models with Runge-Kutta fourth order methods then it's simulated. The analysis results indicates the existence of the stability of each equilibrium point, global stability of disease free equilibrium, and backward bifurcation on the model. The existence of backward bifurcation caused by liver transplantation is not effective therefore endemic equilibrium point still exist when the basic reproduction number below one. Meanwhile the numerical simulation with the Runge Kutta method of fourth order is obtained an accurate chart of stability with a small error from each point of equilibrium based on the value of the basic reproduction number.

Keywords: Epidemic model, Backward bifurcation, Basic Reproduction Number, Runge Kutta fourth order method

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahilahi robbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI MUNDUR PADA MODEL INFEKSI VIRUS HEPATITIS B DAN C PADA TUBUH PASIEN"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS sekaligus dosen pembimbing yang telah memberikan dukungan dan bimbingan selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M.Si dan bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

3. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si , Ibu Soleha, S.Si, M.Si , dan Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Chairul Imron, MI.Komp. selaku koordinator Tugas Akhir dan Mas Ali.
5. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, 10 Juni 2015

Penulis

Special Thank's To

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Allah SWT yang telah memberi rahmat, petunjuk, kekuatan, dan kesabaran dalam setiap langkah kehidupan penulis serta kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing umat-Nya dari zaman jahiliyah menuju zaman yang penuh ilmu.
2. Papa dan ibu, kedua orang tuaku terima kasih atas segala doa, kasih sayang dan pendidikan yang selalu dicurahkan kepada penulis. Masku yang sudah sangat sabar menghadapi adiknya yang nakal dan kurang penurut.
3. Andika, Virama, dan Agus yang telah menjadi sahabat selama kuliah di kampus perjuangan. Maaf, tidak ada kata-kata indah yang bisa kutulis untuk menjelaskannya.
4. Jijong, Agyl yang telah menjadi teman dengan leluconnya yang kadang tidak lucu tetapi penulis tertawa untuk formalitas (*maafkan aku teman*). Nilam, Vimala, Ika, dan Dyna yang telah menjadi teman baik penulis dengan saran dan ceritanya.
5. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir yang banyak sekali sehingga tidak bisa penulis tulis satu persatu.
6. Sahabat sahabat Ibnu Muqlah yang telah membekali ilmu dunia dan akhirat yang jelas tidak kalah pentingnya.

7. Teman-teman angkatan 2011, terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini.

Tentu masih banyak pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini. Semoga Allah SWT membalas dengan balasan yang lebih baik. Aamiin yaa Rabbal 'Aalamiin.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Sistem Kompartemen	7
2.2 Bilangan Reproduksi Dasar	7
2.3 Kestabilan Titik Tetap	8
2.4 Kestabilan Asimtotik Lokal	8
2.4.1 Linearisasi	9
2.4.2 Akar akar persamaan karakteristik	10

2.5	Kestabilan Asimtotik Global titik setimbang bebas penyakit	11
2.6	Bifurkasi	12
2.7	Metode Runge Kutta	13
2.7.1	Metode Runge Kutta orde 2	13
2.7.2	Metode Runge Kutta orde 4	14
BAB III	METODE PENELITIAN	15
3.1	Studi Literatur	15
3.2	Mengkaji model dinamik infeksi virus hepatitis B dan C pada tubuh pasien	15
3.3	Mencari titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar	15
3.4	Menganalisis kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan, kestabilan global pada titik kesetimbangan bebas penyakit, dan bifurkasi	16
3.5	Simulasi dan analisis	16
3.6	Kesimpulan dan saran	16
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	17
4.1	Deskripsi Model dan Asumsi	17
4.2	Daerah Penyelesaian Model	21
4.3	Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit	24
4.4	Titik Kesetimbangan Endemik	26
4.5	Kestabilan Model HVD	29
4.5.1	Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Setimbang Bebas Penyakit	38
4.5.2	Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Setimbang Endemik	41
4.5.3	Kestabilan Asimtotik Global Titik Setimbang Bebas Penyakit	44
4.6	Penyelesaian Numerik dan simulasi	47
4.7	Analisis Bifurkasi	67

BAB V	PENUTUP	75
5.1	Kesimpulan	75
5.2	Saran	77
DAFTAR PUSTAKA		79
LAMPIRAN		81
A	<i>Source Code</i> Kurva Kestabilan	83
BIODATA PENULIS		89

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Diagram Kompartemen model HVD . . .	19
Gambar 4.2	Grafik Kestabilan Bebas Penyakit	53
Gambar 4.3	Grafik Kestabilan Endemik 1	58
Gambar 4.4	Grafik Kestabilan Endemik 2	63
Gambar 4.5	Kurva Bifurkasi Maju	71
Gambar 4.6	Kurva Bifurkasi Mundur	73

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan diuraikan hal-hal yang melatarbelakangi Tugas Akhir yang selanjutnya dituliskan dalam sub perumusan masalah. Dalam bab ini juga dicantumkan batasan masalah, tujuan, dan manfaat dari Tugas Akhir. Sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab.

1.1 Latar Belakang

Pada era global ini, sejumlah penyakit masih menjadi masalah kesehatan utama yang oleh beberapa ahli masih menjadi obyek penelitian. Penyakit bisa disebabkan oleh bakteri, mikroba, ataupun virus. Virus adalah organisme unik yang secara genetik berada di antara hidup dan mati, yaitu apabila berada di luar tubuh inangnya adalah kapsid dan apabila menempel pada inang, maka virus ini akan menginfeksi inang dan bereproduksi[1]. Dengan keunikan ini, virus menjadi tidak bisa mati, hanya bisa dikristalkan. Kenyataan ini menjadikan virus organisme berbahaya. Salah satu virus tersebut adalah virus hepatitis.

Virus hepatitis adalah penyakit menular yang menginfeksi milyaran manusia di seluruh dunia. Enam virus hepatitis saat ini yang telah teridentifikasi adalah A, B, C, D, E, dan G. Dari beberapa contoh tersebut virus Hepatitis B dan C adalah salah satu virus yang masih menjadi masalah kesehatan utama di dunia dan dijadikan obyek penelitian para ahli[2]. Praktik injeksi yang kurang aman, antara lain pemakaian jarum yang tidak steril, menjadi sebab utama menyebarnya virus

Hepatitis B dan C.

Hepatitis B dan C kronis yang tidak ditangani menyebabkan *cirrhosis* dan kanker hati. Berdasarkan perkiraan *Global Burden of Disease*, hepatitis B dan C menyebabkan kematian 1,4 juta orang tahun 2010, termasuk kematian dari infeksi akut, *cirrhosis*, dan kanker hati. Dibandingkan dengan penyakit menular utama lainnya, diperkirakan malaria menyebabkan 660.000 kematian tahun 2010, dan tuberkulosis dan HIV sebanyak 1,4 juta dan 1,7 juta kematian masing-masing tahun 2011. Hal ini menjadikan virus hepatitis salah satu obyek penelitian yang penting bagi *World Health Organization* (WHO) sehingga tindakan pencegahan dan kontrol perlu dilakukan untuk menyelamatkan banyak nyawa dengan mencegah kanker dan mengurangi beban dari penyakit tidak menular ini[2].

Terapi obat digunakan untuk merawat pasien VHB dan VHC. Tetapi metode ini tidak efektif dalam menghilangkan virus pada pasien yang terinfeksi kronis dan pasien butuh melakukan transplantasi hati. Transplantasi hati dipercaya untuk mengobati dan menghilangkan virus secara total di dalam tubuh pasien yang terinfeksi kronis. Tetapi pada kasus terakhir, transplantasi hati pada pasien yang terinfeksi kronis tidak memuaskan. VHB ternyata masih ada dan menginfeksi kembali pasien dengan lebih parah dari sebelumnya. Ini mengindikasikan bahwa virus tidak hanya menginfeksi hati tetapi juga bersirkulasi dalam darah.

Berdasarkan permasalahan tersebut, dalam Tugas Akhir ini penulis akan melakukan analisis pada model infeksi virus hepatitis dengan menyelidiki kestabilan dan adanya bifurkasi mundur. Model ini dibangun dari dua model populasi yaitu populasi dari sel hati dan sel darah serta interaksi antara keduanya melalui sel virus. Solusi numerik dari permasalahan model ini akan diselesaikan dengan metode Runge-Kutta orde

empat.

1.2 Rumusan Masalah

Pada Tugas Akhir ini akan dirumuskan model dinamik infeksi virus hepatitis B dan C dikonstruksi oleh Qesmi dkk[3]. Model dibagi menjadi lima kompartemen yaitu x (Susceptible sel hati) dan z (Susceptible sel darah) adalah individu sel hati dan sel darah yang rentan, y (Infected sel hati) dan w (Infected sel darah) adalah individu sel hati dan sel darah yang terinfeksi, dan v (sel virus) adalah lepasnya sel virus dari sel. Karena infeksi dari virus hepatitis B dan C sama, maka hanya digunakan satu model.

Permasalahan dalam usulan Tugas Akhir ini adalah :

1. Bagaimana menentukan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan, kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit, bilangan reproduksi dasar, dan bifurkasi mundur?
2. Bagaimana interpretasi hasil analisis dari model tersebut dan penyelesaian numerik dari model dengan metode Runge-Kutta serta simulasinya?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini akan dibatasi pada model dinamik infeksi virus hepatitis B dan C pada tubuh pasien.

1.4 Tujuan

Tujuan dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Menentukan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan, kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit, bilangan reproduksi dasar, dan bifurkasi mundur.

2. Mengintrepetasikan hasil analisis dari model tersebut dan penyelesaian numerik dari model dengan metode Runge-Kutta serta simulasinya.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Membantu mempelajari dampak dari ditentukannya kestabilan dari setiap titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan adanya bifurkasi mundur pada model.
2. Diperoleh pengetahuan dalam mengintrepetasikan hasil analisis dan simulasi pada model infeksi virus hepatitis B dan C pada tubuh pasien.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. **BAB I PENDAHULUAN**
Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.
2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**
Bab ini berisi tentang teori dasar yang mendukung dalam Tugas Akhir ini, antara lain sistem kompartemen, kestabilan asimtotik lokal, bilangan reproduksi dasar, bifurkasi, dan metode runge kutta.
3. **BAB III METODE PENELITIAN**
Bab ini menjelaskan tahapan-tahapan dan metode yang digunakan dalam pengerjaan Tugas Akhir.
4. **BAB IV PEMBAHASAN**
Bab ini membahas tentang analisis kestabilan lokal pada

model dinamik infeksi virus hepatitis B dan C pada tubuh pasien, analisis bifurkasi dari bilangan reproduksi dasar yang telah diperoleh, mencari solusi numerik dengan metode runge kutta, dan simulasi dari model.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan Tugas Akhir yang diperoleh dari bab pembahasan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini diuraikan mengenai hepatitis khususnya hepatitis B dan C, kestabilan titik tetap, stabil asimtotik lokal, bilangan reproduksi dasar, bifurkasi, dan metode runge kutta.

2.1 Sistem Kompartemen

Sistem kompartemen merupakan susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya seperti saat individu tersebut rentan, terinfeksi, atau sembuh dari penyakit.

2.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*).

Bilangan Reproduksi Dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung didalam populasi *susceptible*. Namun adapula yang mengartikan rasio atau perbandingan yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu *infected*.

Jika model hanya mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, maka tidak terjadi endemik jika Bilangan Reproduksi Dasar kurang dari satu dan terjadi endemik jika Bilangan Reproduksi Dasar lebih dari satu.

Secara matematik, bilangan reproduksi dasar dapat

diperoleh dengan menentukan nilai eigen (nilai karakteristik) dari matriks jacobian yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada model kompleks, suatu model mungkin mempunyai lebih dari satu bilangan reproduksi dasar. Untuk kasus seperti ini, bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai terbesar dari beberapa bilangan reproduksi dasar.

2.3 Kestabilan Titik Tetap

Pandang persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik kesetimbangan dari Persamaan (2.1) jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan

$$x(t) \equiv \bar{x}_0$$

dan

$$y(t) \equiv \bar{y}_0$$

adalah penyelesaian kesetimbangan dari Persamaan (2.1) untuk semua t .

2.4 Kestabilan Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotik lokal merupakan kestabilan dari sistem linear atau kestabilan dari linearisasi sistem tak linear. Kestabilan asimtotik lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

2.4.1 Linearisasi

Linearisasi adalah proses hampiran persamaan diferensial non linear dengan bentuk linear. Tinjau kembali Persamaan (2.1) dimana f dan g nonlinear dan (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan dari Persamaan (2.1). Setelah itu akan dicari pendekatan fungsi f dan g dengan menggunakan ekspansi deret Taylor disekitar titik (x_0, y_0) sebagai berikut

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Karena (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan maka $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Oleh karena itu, sistem (2.1) dapat didekati sebagai sistem linear

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(\Delta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(\Delta x) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(\Delta y)$$

Sistem linear dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}^T = J \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Matriks J pada sistem linear tersebut adalah matriks Jacobian pada suatu titik kesetimbangan (x_0, y_0) .

2.4.2 Akar akar persamaan karakteristik

Diberikan definisi akar akar persamaan karakteristik

Definisi 2.4.2.1. [4] *Jika J adalah matriks berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol x dinamakan vektor karakteristik (vektor eigen) dari J jika memenuhi :*

$$Jx = \lambda x \quad (2.2)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x disebut vektor karakteristik (vektor eigen) yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai karakteristik matrik J berukuran $n \times n$, maka Persamaan (2.2) dapat ditulis:

$$(\lambda I - J)x = 0 \quad (2.3)$$

mempunyai penyelesaian x tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - J| = 0 \quad (2.4)$$

Jika matriks didefinisikan dengan

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dan

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka Persamaan (2.4) dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

Teorema 2.4.2.2. [4] *Jika J adalah matriks segitiga (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) berukuran $n \times n$, maka determinan dari J adalah perkalian dari diagonal utama matriks tersebut yaitu $\det(J) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.*

Teorema 2.4.2.3. [6] *Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotik jika dan hanya jika nilai karakteristik dari*

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.5 Kestabilan Asimtotik Global titik setimbang bebas penyakit

Diberikan definisi kestabilan global titik kesetimbangan pada suatu sistem.

Definisi 2.5.1. [7] *Titik kesetimbangan $\hat{x} \in \mathbb{R}$ pada sistem persamaan diferensial non linear dikatakan stabil asimtotik global jika untuk sebarang nilai awal $x(t_0)$ yang diberikan, setiap solusi Sistem tersebut yaitu $x(t)$ dengan $t \rightarrow \infty$ menuju titik kesetimbangan \hat{x} atau $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x}$.*

Untuk mendapatkan kestabilan global dari suatu model digunakan fungsi Lyapunov. Suatu fungsi dikatakan fungsi Lyapunov apabila memenuhi tiga pernyataan pada definisi berikut.

Definisi 2.5.2. [7] *Diberikan fungsi $V : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dan $\hat{x} \in E$ titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial nonlinear. Fungsi dikatakan Lyapunov jika memenuhi ketiga pernyataan berikut:*

- a. Fungsi V kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada E .
- b. Fungsi $V(x) > 0$ untuk $x \in E$ dengan $x \neq \hat{x}$ dan $V(\hat{x}) = 0$ dengan $x = \hat{x}$.
- c. Fungsi $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in E$.

Berikut diberikan definisi yang akan digunakan untuk menganalisis sifat kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit sistem persamaan diferensial nonlinear.

Definisi 2.5.3. [7] *Diberikan suatu sistem persamaan diferensial nonlinear dengan $E \subset \mathbb{R}^n$. Jika terdapat fungsi Lyapunov V , dengan*

- a. $E_k \{x \in E | V(x) \leq k\}$ untuk suatu $k > 0$ merupakan himpunan terbatas,
- b. $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in E_k$, dan
- c. terdapat M himpunan invariant terbesar dalam $H = \{x \in E_k | \dot{V}(x) = 0\}$, maka setiap solusi $x(t)$ menuju ke M untuk $t \rightarrow \infty$.

2.6 Bifurkasi

Pada sistem dinamik non linear sering dijumpai kestabilan di sekitar titik kesetimbangan suatu sistem persamaan yang mana akan membantu dalam analisis bifurkasi. Bifurkasi secara umum adalah perubahan kualitatif yang meliputi perubahan stabilitas dan perubahan banyaknya titik kesetimbangan karena perubahan nilai - nilai parameter. Dalam epidemiologi, fenomena bifurkasi berhubungan dengan parameter ambang batas, yang paling umum merupakan bilangan reproduksi dasar yang disimbolkan dengan \mathfrak{R}_0 .

Ada dua jenis bifurkasi dalam model penyebaran

penyakit menular yaitu bifurkasi maju dan bifurkasi mundur. Eksistensi bifurkasi maju dan mundur pada model penyebaran penyakit ditunjukkan oleh diagram bifurkasi pada Gambar 2.3 dan Gambar 2.4. Fenomena bifurkasi maju terjadi pada saat $\mathfrak{R}_0 > 1$ dimana hanya ada satu titik kesetimbangan endemik. Sedangkan fenomena bifurkasi mundur terjadi pada saat $\mathfrak{R}_0 < 1$ mempunyai dua titik kesetimbangan endemik[3].

2.7 Metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler, dimana perhitungan penyelesaian dilakukan step demi step. Untuk fungsi dari persamaan differensial :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Dengan titik pendekatan awal x_0, y_0 , berdasarkan metode Euler nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n(x_n, y_n)$$

h adalah langkah waktu.

2.7.1 Metode Runge Kutta orde 2

Metode Runge-Kutta membuat step yang lebih kecil dari perubahan nilai dengan membagi nilai perubahan tiap step menjadi sejumlah bagian yang ditentukan, bentuk paling sederhana dari metode Runge Kutta ini adalah membagi bagian perubahan menjadi dua bagian sehingga :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

2.7.2 Metode Runge Kutta orde 4

Bila pada metode Runge-Kutta 2, nilai koefisien perbaikannya adalah dua buah, maka pada metode ini menggunakan empat nilai koefisien perbaikan. Pandang persamaan differensial:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, t)\end{aligned}$$

Dengan titik awal $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ maka penyelesaian integrasinya akan diperoleh

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

dengan

$$k_{1,x} = hf(t_n, x_n)$$

$$k_{2,x} = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2})$$

$$k_{3,x} = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2})$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + k_{3,x})$$

dan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

dengan

$$k_{1,y} = hf(t_n, y_n)$$

$$k_{2,y} = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2})$$

$$k_{3,y} = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2})$$

$$k_{4,y} = hf(t_n + h, y_n + k_{3,y})$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Bab ini menguraikan metode yang akan digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian ini dapat disusun secara sistematis. ini

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi yang dipakai adalah buku-buku literatur, jurnal ilmiah, Tugas Akhir atau thesis yang berkaitan dengan permasalahan, maupun artikel dari internet.

3.2 Mengkaji model dinamik infeksi virus hepatitis B dan C pada tubuh pasien

Tahap ini memahami model dinamik infeksi virus hepatitis B dan C pada tubuh pasien dengan asumsi tertentu sehingga bisa didapatkan diagram kompartemen dari model tersebut dengan 5 kompartemen yaitu susceptible sel hati, susceptible sel darah, infected sel hati, infected sel darah dan sel virus.

3.3 Mencari titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar

Dari model dinamik yang diperoleh akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit ($I = 0$) dan titik kesetimbangan endemik ($I \neq 0$) yang selanjutnya dapat ditentukan nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut sehingga dapat ditentukan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0).

3.4 Menganalisis kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan, kestabilan global pada titik kesetimbangan bebas penyakit, dan bifurkasi

Pada tahap ini akan dicari kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dengan memasukkan nilai kesetimbangan kedalam matriks Jacobian, sehingga didapatkan nilai akar-akar karakteristik dari matriks Jacobiannya untuk mengetahui kestabilan asimtotik lokal pada titik titik tersebut. Selanjutnya diselidiki kestabilan global pada titik kesetimbangan bebas penyakit serta menentukan kurva bifurkasi melalui nilai \mathfrak{R}_0 .

3.5 Simulasi dan analisis

Pada tahap ini penulis akan melakukan solusi numerik dari model dengan metode Runge-Kutta orde 4 dan simulasi untuk mengetahui grafik kestabilan dari model dinamik.

3.6 Kesimpulan dan saran

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka dapat ditarik suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dibahas tentang daerah penyelesaian model, titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, kemudian akan dicari kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan tersebut, dan bilangan reproduksi dasar, kemudian menentukan bifurkasinya (bifurkasi mundur) berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar. Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian solusi numerik dari model dan simulasinya.

4.1 Deskripsi Model dan Asumsi

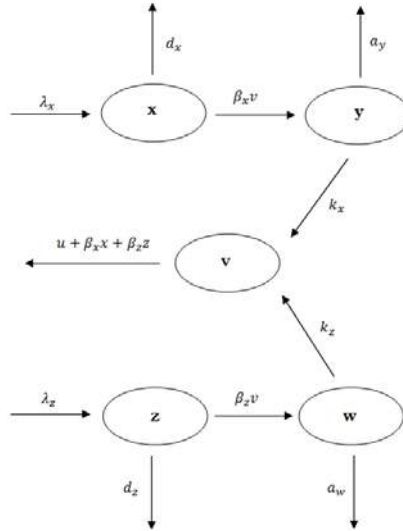
Model dinamik yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini memakai asumsi sebagai berikut :

1. Model dinamik merupakan kombinasi dari dua model non linear dari populasi sel hati dan sel darah yang terinfeksi virus hepatitis. Model mendeskripsikan interaksi antara sel hati dan sel darah yang terinfeksi oleh hepatitis B atau C. Karena kedua tipe hepatitis ini memiliki cara infeksi yang sama, maka hanya akan digunakan satu model. Model ini disebut HVD (Hati-Virus-Darah)
2. Populasi sel hati dikelompokkan menjadi dua kelompok antara lain *susceptible* ($x(t)$) yaitu sel hati yang rentan terhadap virus dan *infected* ($y(t)$) yaitu sel hati yang terinfeksi oleh virus. Sedangkan untuk sel darah dikelompokkan menjadi dua kelompok, *susceptible* ($z(t)$) yaitu sel darah yang rentan terhadap virus dan *infected*

($w(t)$) yaitu sel darah yang terinfeksi oleh virus. Sel virus ($v(t)$) adalah satu kompartemen yang di dalamnya merupakan populasi dari sel hati juga sel darah karena virus yang menginfeksi sama meskipun yang terinfeksi berbeda dalam hal populasi tetapi yang dihasilkan adalah virus yang sama yaitu virus hepatitis.

3. Model HVD mendiskripsikan interaksi antara sel hati atau sel darah (rentan) yang berkaitan dengan kematian yang disebabkan kontak dengan virus. Sel hati atau sel darah (rentan) terhadap penyakit dapat terinfeksi apabila melakukan kontak langsung dengan virus.
4. Berikut merupakan definisi parameter-parameter yang terdapat dalam model HVD, yaitu
 - a. λ_x menyatakan angka produksi dari sel hati yang rentan dalam tubuh manusia dan λ_z menyatakan angka produksi dari sel darah yang rentan dalam tubuh manusia.
 - b. β_x menyatakan angka sel hati terinfeksi oleh virus dan β_z menyatakan angka sel darah terinfeksi oleh virus.
 - c. d_x menyatakan angka kematian alami dari sel hati dan d_z menyatakan angka kematian alami dari sel darah.
 - d. a_y menyatakan angka kematian sel hati yang terinfeksi dan a_w menyatakan angka kematian sel darah yang terinfeksi.
 - e. k_x menyatakan angka sel hati yang terinfeksi memproduksi virus dan k_z menyatakan angka sel darah yang terinfeksi memproduksi virus.
 - f. u menyatakan angka kematian dari sel virus karena terapi/pengobatan.

Dari asumsi tersebut dapat digambarkan diagram kompartemen dari model HVD sebagai berikut[3]:



Gambar 4.1: Diagram Kompartemen model HVD

Dari Gambar 4.1, diperoleh model HVD sebagai berikut:

1. Besarnya laju populasi sel hati yang rentan (*susceptible*) dipengaruhi oleh angka produksi dari sel hati yang rentan dalam tubuh manusia, sedangkan populasi akan menurun dengan adanya beberapa kejadian, antara lain sel hati terinfeksi oleh virus, dan kematian alami sel hati.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_x - \beta_x xv - d_x x$$

2. Besarnya laju populasi sel hati yang terinfeksi (*infected*) akan bertambah saat terdapat sel hati yang terinfeksi

virus dan populasi akan menurun apabila sel yang terinfeksi mati.

$$\frac{dy}{dt} = \beta_x xv - a_y y$$

3. Besarnya laju populasi sel virus dipengaruhi oleh sel hati dan sel darah terinfeksi dalam memproduksi virus per sel dan akan menurun apabila sel virus mati karena terapi maupun karena menginfeksi sel hati dan sel darah yang masih sehat.

$$\frac{dv}{dt} = k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv$$

4. Besarnya laju populasi sel darah yang rentan (*susceptible*) dipengaruhi oleh angka produksi dari sel darah yang rentan dalam tubuh manusia, sedangkan populasi akan menurun dengan adanya beberapa kejadian, antara lain sel darah terinfeksi oleh virus, dan kematian alami sel darah.

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_z - \beta_z zv - d_z z$$

5. Besarnya laju populasi sel darah yang terinfeksi (*infected*) akan bertambah saat terdapat sel darah yang terinfeksi virus dan populasi akan menurun apabila sel yang terinfeksi mati.

$$\frac{dw}{dt} = \beta_z zv - a_w w$$

Dari penjelasan di atas maka sistem persamaan model HVD dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_x - \beta_x xv - d_x x \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_x xv - a_y y \quad (4.2)$$

$$\frac{dv}{dt} = k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv \quad (4.3)$$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_z - \beta_z zv - d_z z \quad (4.4)$$

$$\frac{dw}{dt} = \beta_z zv - a_w w \quad (4.5)$$

dengan kondisi awal:

$$x(0) \geq 0, y(0) \geq 0, v(0) \geq 0, z(0) \geq 0, w(0) \geq 0 \quad (4.6)$$

4.2 Daerah Penyelesaian Model

Dalam sistem, diketahui bahwa populasi hati dan darah adalah *Susceptible* dan *infected* dan sel virus hanya memiliki satu kompartemen. Selanjutnya akan dicari jumlah dari kompartemen *Susceptible* dan *infected* dari sel hati sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x + y) &= \lambda_x - \beta_x xv - d_x x + \beta_x xv - a_y y \\ &= \lambda_x - d_x x - a_y y \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (z + w) &= \lambda_z - \beta_z zv - d_z z + \beta_z zv - a_w w \\ &= \lambda_z - d_z z - a_w w \end{aligned} \quad (4.8)$$

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan [3], umur dari sel darah atau sel hati yang terinfeksi lebih pendek dari umur sel darah atau sel hati yang sehat. Sehingga diasumsikan $d_x \leq a_y$ dan $d_z \leq a_w$. Persamaan (4.7) dan Persamaan (4.8)

menjadi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x+y) &\leq \lambda_x - d_x(x+y) \\ \frac{d}{dt}(z+w) &\leq \lambda_z - d_z(z+w)\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan diferensial di atas, perhatikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{d}{dt}(x+y) = \lambda_x - d_x(x+y) \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt}(z+w) = \lambda_z - d_z(z+w) \quad (4.10)$$

Selanjutnya akan dicari masing-masing dari nilai $(x+y)(t)$ dan $(z+w)(t)$. Persamaan (4.9) bisa diselesaikan dengan menggunakan persamaan diferensial terpisah

$$\begin{aligned}\frac{d(x+y)}{dt} &= \lambda_x - d_x(x+y) \\ \frac{d(x+y)}{\lambda_x - d_x(x+y)} &= dt\end{aligned} \quad (4.11)$$

Selanjutnya Persamaan (4.11) diintegrasikan kedua ruasnya

$$\int \frac{d(x+y)}{\lambda_x - d_x(x+y)} = \int dt$$

Misal :

$$m = \lambda_x - d_x(x+y) \quad (4.12)$$

Maka $d(x + y) = -\frac{dm}{d_x}$, sehingga

$$\begin{aligned}
 \int -\frac{dm}{md_x} &= \int dt \\
 \Leftrightarrow -\frac{\ln |m|}{d_x} &= t - \ln |c|^{\frac{1}{d_x}} \\
 \Leftrightarrow \ln |m| &= -d_x t + d_x \ln |c|^{\frac{1}{d_x}} \\
 \Leftrightarrow \ln |m| &= -d_x t + \ln |c| \\
 \Leftrightarrow \ln \frac{|m|}{|c|} &= -d_x t \\
 \Leftrightarrow m &= ce^{-d_x t}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusikan nilai m ke Persamaan (4.12), sehingga

$$\begin{aligned}
 \lambda_x - d_x(x + y) &= ce^{-d_x t} \\
 d_x(x + y) &= \lambda_x - ce^{-d_x t} \\
 (x + y) &= \frac{\lambda_x - ce^{-d_x t}}{d_x} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} (x + y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_x - ce^{-d_x t}}{d_x} \\
 (x + y) &= \frac{\lambda_x}{d_x}
 \end{aligned}$$

Karena itu, maka $0 \leq x + y \leq \frac{\lambda_x}{d_x}$. Selanjutnya Persamaan (4.10) dengan cara yang sama diperoleh

$$(z + w) = \frac{\lambda_z}{d_z}$$

Sehingga $0 \leq z + w \leq \frac{\lambda_z}{d_z}$. Selanjutnya akan dicari nilai $\frac{dv}{dt}$, persamaannya adalah

$$\frac{dv}{dt} = k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv$$

Dengan menggunakan hasil sebelumnya yaitu $y \leq \frac{\lambda_x}{d_x}$ dan $w \leq \frac{\lambda_z}{d_z}$, maka Persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &\leq k_x \frac{\lambda_x}{d_x} + k_z \frac{\lambda_z}{d_z} - uv - \beta_x xv - \beta_z zv \\ \frac{dv}{dt} &\leq k_x \frac{\lambda_x}{d_x} + k_z \frac{\lambda_z}{d_z} - uv\end{aligned}$$

Sehingga Persamaan di atas dapat dituliskan

$$\frac{dv}{dt} = k_x \frac{\lambda_x}{d_x} + k_z \frac{\lambda_z}{d_z} - uv \quad (4.13)$$

Persamaan (4.13) diselesaikan dengan cara yang sama diperoleh

$$v = \frac{k_x \frac{\lambda_x}{d_x} + k_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{u}$$

Sehingga $0 \leq v \leq \frac{k_x \frac{\lambda_x}{d_x} + k_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{u}$.

Jadi daerah penyelesaian yang mungkin untuk sistem dalam Persamaan (4.1) sampai (4.5) adalah $\Omega = \left((x, y, v, z, w) \in R_+^5, \left(x + y \leq \frac{\lambda_x}{d_x}, z + w \leq \frac{\lambda_z}{d_z}, v \leq \frac{k_x \frac{\lambda_x}{d_x} + k_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{u} \right) \right)$.

Karena kondisi awal pada Persamaan (4.6) bernilai positif maka Ω merupakan daerah invarian positif.

4.3 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran penyakit (dalam hal ini virus) dalam suatu populasi sehingga $infected = 0$ atau $y=0$ dan $w=0$.

Untuk memperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit akan dinyatakan ruas kiri pada Persamaan (4.1)-(4.5) bernilai nol kemudian mensubstitusikannya sehingga diperoleh titik $I_0 = (x_0, y_0, v_0, z_0, w_0)$. Selanjutnya akan dicari

nilai x_0, v_0 , dan z_0 dari Persamaan (4.1), (4.3), dan (4.4) dengan ruas kanan bernilai nol kemudian mensubstitusikan $y_0 = w_0 = 0$.

Menentukan nilai v_0

$$\begin{aligned}
 \frac{dv}{dt} &= 0 \\
 \Leftrightarrow k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv &= 0 \\
 \Leftrightarrow 0 + 0 - v(u - \beta_x x - \beta_z x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow v = 0, \text{ maka} \\
 v_0 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Menentukan nilai x_0

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \lambda_x - \beta_x xv - d_x x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda_x}{d_x}, \text{ maka} \\
 x_0 &= \frac{\lambda_x}{d_x}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Menentukan nilai z_0

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \lambda_z - \beta_z zv - d_z z &= 0 \\
 \Leftrightarrow z = \frac{\lambda_z}{d_z}, \text{ maka} \\
 z_0 &= \frac{\lambda_z}{d_z}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Berdasarkan Persamaan (4.14), (4.15), dan (4.16), diketahui $y_0 = w_0 = 0$ diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $I_0 = (x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) = (\frac{\lambda_x}{d_x}, 0, 0, \frac{\lambda_z}{d_z}, 0)$.

4.4 Titik Keseimbangan Endemik

Titik keseimbangan endemik digunakan untuk menunjukkan bahwa dalam populasi terjadi penyebaran penyakit (dalam hal ini virus) sehingga $y_0 \neq w_0 \neq 0$

Untuk memperoleh titik keseimbangan endemik akan dinyatakan ruas kiri pada Persamaan (4.1) sampai (4.5) bernilai nol sehingga $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0, \text{ dan } \frac{dw}{dt} = 0$. Kemudian mensubstitusikan sehingga diperoleh $I_1 = (x^*, y^*, v^*, z^*, w^*)$.

Pertama-tama akan dicari nilai x^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_x - \beta_x xv - d_x x &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_x &= x(\beta_x v + d_x) \\ x^* &= \frac{\lambda_x}{(\beta_x v^* + d_x)} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Selanjutnya akan dicari nilai z^*

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_z - \beta_z zv - d_z z &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_z &= z(\beta_z v + d_z) \\ z^* &= \frac{\lambda_z}{(\beta_z v^* + d_z)} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Selanjutnya akan dicari nilai y^*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta_x xv - a_y y &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta_x xv &= a_y y \end{aligned}$$

$$y^* = \frac{\beta_x x^* v^*}{a_y} \quad (4.19)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.17) ke Persamaan (4.19), maka Persamaan (4.19) menjadi

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{\beta_x x^* v^*}{a_y} \\ &= \frac{\beta_x \frac{\lambda_x}{(\beta_x v^* + d_x)} v^*}{a_y} \\ y^* &= \frac{\beta_x \lambda_x v^*}{(\beta_x v^* + d_x) a_y} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Selanjutnya akan dicari nilai w^*

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta_z z v - a_w w &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta_z z v &= a_w w \\ w^* &= \frac{\beta_z z^* v^*}{a_w} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.18) ke Persamaan (4.21), maka Persamaan (4.21) menjadi

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{\beta_z z^* v^*}{a_w} \\ &= \frac{\beta_z \frac{\lambda_z}{(\beta_z v^* + d_z)} v^*}{a_w} \\ w^* &= \frac{\beta_z \lambda_z v^*}{(\beta_z v^* + d_z) a_w} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Karena $v^* \neq 0$ selanjutnya akan dicari nilai $h(v^*)$ dengan cara mensubstitusikan x^*, z^*, y^* , dan w^* pada Persamaan (4.3) dan ruas kiri Persamaan (4.3) bernilai nol, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= k_x y + k_z w - uv - \beta_x x v - \beta_z z v \\
0 &= k_x y^* + k_z w^* - uv^* - \beta_x x^* v^* - \beta_z z^* v^* \\
0 &= k_x \frac{\beta_x \lambda_x v^*}{(\beta_x v^* + d_x) a_y} + k_z \frac{\beta_z \lambda_z v^*}{(\beta_z v^* + d_z) a_w} - uv^* \\
&\quad - \beta_x \frac{\lambda_x}{(\beta_x v^* + d_x)} v^* - \beta_z \frac{\lambda_z}{(\beta_z v^* + d_z)} v^* \\
0 &= k_x \frac{\beta_x \lambda_x v^*}{(\beta_x v^* + d_x) a_y} + k_z \frac{\beta_z \lambda_z v^*}{(\beta_z v^* + d_z) a_w} - uv^* \\
&\quad - \beta_x a_y \frac{\lambda_x}{(\beta_x v^* + d_x) a_y} v^* - \beta_z a_w \frac{\lambda_z}{(\beta_z v^* + d_z) a_w} v^* \\
0 &= (k_x - a_y) \frac{\lambda_x \beta_x v^*}{(\beta_x v^* + d_x) a_y} + (k_z - a_w) \frac{\beta_z \lambda_z v^*}{(\beta_z v^* + d_z) a_w} - uv^*
\end{aligned}$$

Selanjutnya Persamaan di atas dikalikan $(\beta_x v^* + d_x) \frac{(\beta_z v^* + d_z)}{v^*}$, sehingga

$$\begin{aligned}
0 &= (k_x - a_y)(\beta_z v^* + d_z) \frac{\lambda_x \beta_x}{a_y} + (k_z - a_w)(\beta_x v^* + d_x) \frac{\beta_z \lambda_z}{a_w} \\
&\quad - u(\beta_x v^* + d_x)(\beta_z v^* + d_z) \\
0 &= (k_x \beta_z v^* + k_x d_z - a_y \beta_z v^* - a_y d_z) \frac{\lambda_x \beta_x}{a_y} + (k_z \beta_x v^* + k_z d_x \\
&\quad - a_w \beta_x v^* - a_w d_x) \frac{\lambda_z \beta_z}{a_w} - u(\beta_x \beta_z (v^*)^2 + \beta_x d_z v^* + \beta_z d_x v^* \\
&\quad + d_x d_z) \\
0 &= u \beta_x \beta_z v^{*2} + u \beta_x d_z v^* + u \beta_z d_x v^* + u d_x d_z - \frac{k_x \lambda_x \beta_x \beta_z}{a_y} v^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k_x \lambda_x \beta_x d_z}{a_y} + \lambda_x \beta_x \beta_z v^* + \lambda_x \beta_x d_z - \frac{k_z \beta_x \lambda_z \beta_z}{a_w} v^* \\
& -\frac{k_z \lambda_z \beta_z d_x}{a_w} + \lambda_z \beta_x \beta_z v^* + \lambda_z \beta_z d_x
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
h(v^*) = & u \beta_x \beta_z v^{*2} + (u \beta_x d_z + u \beta_z d_x - \frac{k_x \lambda_x \beta_x \beta_z}{a_y} + \lambda_x \beta_x \beta_z \\
& - \frac{k_z \beta_x \lambda_z \beta_z}{a_w} + \lambda_z \beta_x \beta_z) v^* + u d_x d_z - \frac{k_x \lambda_x \beta_x d_z}{a_y} + \lambda_x \beta_x d_z \\
& - \frac{k_z \lambda_z \beta_z d_x}{a_w} + \lambda_z \beta_z d_x = 0
\end{aligned}$$

Atau bisa ditulis sebagai berikut

$$h(v^*) = A v^{*2} + B v^* + C = 0 \quad (4.23)$$

dengan

$$\begin{aligned}
A &= u \beta_x \beta_z, \\
B &= u \beta_x d_z + u \beta_z d_x - \frac{k_x \lambda_x \beta_x \beta_z}{a_y} + \lambda_x \beta_x \beta_z - \frac{k_z \beta_x \lambda_z \beta_z}{a_w} \\
&+ \lambda_z \beta_x \beta_z, \\
C &= u d_x d_z - \frac{k_x \lambda_x \beta_x d_z}{a_y} + \lambda_x \beta_x d_z - \frac{k_z \lambda_z \beta_z d_x}{a_w} + \lambda_z \beta_z d_x
\end{aligned}$$

4.5 Kestabilan Model HVD

Setelah diperoleh titik kesetimbangan maka dilakukan analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit apakah mendekati titik setimbang atau tidak[6]. Analisis ini dilakukan pada titik kesetimbangan bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*) dan titik kesetimbangan endemik (*Endemic Equilibrium*).

Model HVD merupakan model persamaan tak linear,

sehingga perlu dilakukan linearisasi sebelum melakukan analisis kestabilan. Untuk melakukan linearisasi digunakan ekspansi deret Taylor pada Persamaan (4.1) sampai (4.5) sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= A(x, y, v, z, w) \\
&= \lambda_x - \beta_x xv - d_x x \\
\frac{dy}{dt} &= B(x, y, v, z, w) \\
&= \beta_x xv - a_y y \\
\frac{dv}{dt} &= C(x, y, v, z, w) \\
&= k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv \\
\frac{dz}{dt} &= D(x, y, v, z, w) \\
&= \lambda_z - \beta_z zv - d_z z \\
\frac{dw}{dt} &= E(x, y, v, z, w) \\
&= \beta_z zv - a_w w
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Dengan titik tetap $(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0)$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= A(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) = 0 \\
\frac{dy}{dt} &= B(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) = 0 \\
\frac{dv}{dt} &= C(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) = 0 \\
\frac{dz}{dt} &= D(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) = 0 \\
\frac{dw}{dt} &= E(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) = 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned}
 x - x_0 = f &\Rightarrow \dot{x} = \dot{f} \\
 y - y_0 = g &\Rightarrow \dot{z} = \dot{g} \\
 v - v_0 = h &\Rightarrow \dot{y} = \dot{h} \\
 z - z_0 = i &\Rightarrow \dot{w} = \dot{i} \\
 w - w_0 = j &\Rightarrow \dot{v} = \dot{j}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Deret Taylor dari sistem (4.24) di sekitar titik tetap $(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0)$ adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= A(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) + (x - x_0) \frac{\partial A}{\partial x} \\
 &\quad + (y - y_0) \frac{\partial A}{\partial y} + (v - v_0) \frac{\partial A}{\partial v} \\
 &\quad + (z - z_0) \frac{\partial A}{\partial z} + (w - w_0) \frac{\partial A}{\partial w} + \dots \\
 \frac{dy}{dt} &= B(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) + (x - x_0) \frac{\partial B}{\partial x} \\
 &\quad + (y - y_0) \frac{\partial B}{\partial y} + (v - v_0) \frac{\partial B}{\partial v} \\
 &\quad + (z - z_0) \frac{\partial B}{\partial z} + (w - w_0) \frac{\partial B}{\partial w} + \dots \\
 \frac{dv}{dt} &= C(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) + (x - x_0) \frac{\partial C}{\partial x} \\
 &\quad + (y - y_0) \frac{\partial C}{\partial y} + (v - v_0) \frac{\partial C}{\partial v} \\
 &\quad + (z - z_0) \frac{\partial C}{\partial z} + (w - w_0) \frac{\partial C}{\partial w} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= D(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) + (x - x_0) \frac{\partial D}{\partial x} \\
&\quad + (y - y_0) \frac{\partial D}{\partial y} + (v - v_0) \frac{\partial D}{\partial v} \\
&\quad + (z - z_0) \frac{\partial D}{\partial z} + (w - w_0) \frac{\partial D}{\partial w} + \dots \\
\frac{dw}{dt} &= E(x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) + (x - x_0) \frac{\partial E}{\partial x} \\
&\quad + (y - y_0) \frac{\partial E}{\partial y} + (v - v_0) \frac{\partial E}{\partial v} \\
&\quad + (z - z_0) \frac{\partial E}{\partial z} + (w - w_0) \frac{\partial E}{\partial w} + \dots
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.25), maka linearisasi dari sistem (4.24) adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (x - x_0) \frac{\partial A}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial A}{\partial y} \\
&\quad + (v - v_0) \frac{\partial A}{\partial v} + (z - z_0) \frac{\partial A}{\partial z} \\
&\quad + (w - w_0) \frac{\partial A}{\partial w} \\
\frac{dy}{dt} &= (x - x_0) \frac{\partial B}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial B}{\partial y} \\
&\quad + (v - v_0) \frac{\partial B}{\partial v} + (z - z_0) \frac{\partial B}{\partial z} \\
&\quad + (w - w_0) \frac{\partial B}{\partial w} \\
\frac{dv}{dt} &= (x - x_0) \frac{\partial C}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial C}{\partial y} \\
&\quad + (v - v_0) \frac{\partial C}{\partial v} + (z - z_0) \frac{\partial C}{\partial z} \\
&\quad + (w - w_0) \frac{\partial C}{\partial w}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= (x - x_0) \frac{\partial D}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial D}{\partial y} \\
&\quad + (v - v_0) \frac{\partial D}{\partial v} + (z - z_0) \frac{\partial D}{\partial z} \\
&\quad + (w - w_0) \frac{\partial D}{\partial w} \\
\frac{dw}{dt} &= (x - x_0) \frac{\partial E}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial E}{\partial y} \\
&\quad + (v - v_0) \frac{\partial E}{\partial v} + (z - z_0) \frac{\partial E}{\partial z} \\
&\quad + (w - w_0) \frac{\partial E}{\partial w}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan permisalan (4.26), maka hasil linearisasi dari sistem (4.24) seperti yang tertulis tersebut menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f \frac{\partial A}{\partial x} + g \frac{\partial A}{\partial y} + h \frac{\partial A}{\partial v} + i \frac{\partial A}{\partial z} + j \frac{\partial A}{\partial w} \\
\frac{dy}{dt} &= f \frac{\partial B}{\partial x} + g \frac{\partial B}{\partial y} + h \frac{\partial B}{\partial v} + i \frac{\partial B}{\partial z} + j \frac{\partial B}{\partial w} \\
\frac{dv}{dt} &= f \frac{\partial C}{\partial x} + g \frac{\partial C}{\partial y} + h \frac{\partial C}{\partial v} + i \frac{\partial C}{\partial z} + j \frac{\partial C}{\partial w} \\
\frac{dz}{dt} &= f \frac{\partial D}{\partial x} + g \frac{\partial D}{\partial y} + h \frac{\partial D}{\partial v} + i \frac{\partial D}{\partial z} + j \frac{\partial D}{\partial w} \\
\frac{dw}{dt} &= f \frac{\partial E}{\partial x} + g \frac{\partial E}{\partial y} + h \frac{\partial E}{\partial v} + i \frac{\partial E}{\partial z} + j \frac{\partial E}{\partial w}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Persamaan (4.27) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial A}{\partial z} & \frac{\partial A}{\partial w} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial z} & \frac{\partial B}{\partial w} \\ \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial z} & \frac{\partial C}{\partial w} \\ \frac{\partial D}{\partial x} & \frac{\partial D}{\partial y} & \frac{\partial D}{\partial v} & \frac{\partial D}{\partial z} & \frac{\partial D}{\partial w} \\ \frac{\partial E}{\partial x} & \frac{\partial E}{\partial y} & \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{\partial E}{\partial z} & \frac{\partial E}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian dari matriks tersebut adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial A}{\partial z} & \frac{\partial A}{\partial w} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial z} & \frac{\partial B}{\partial w} \\ \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial z} & \frac{\partial C}{\partial w} \\ \frac{\partial D}{\partial x} & \frac{\partial D}{\partial y} & \frac{\partial D}{\partial v} & \frac{\partial D}{\partial z} & \frac{\partial D}{\partial w} \\ \frac{\partial E}{\partial x} & \frac{\partial E}{\partial y} & \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{\partial E}{\partial z} & \frac{\partial E}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari matriks Jacobian dari sistem (4.24) dengan mendiferensialkannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_x - \beta_x xv - d_x x) \\ &= -\beta_x v - d_x \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_x - \beta_x xv - d_x x) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(\lambda_x - \beta_x xv - d_x x) \\ &= -\beta_x x \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_x - \beta_x xv - d_x x) \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w}(\lambda_x - \beta_x xv - d_x x) \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\beta_x xv - a_y y) \\ &= \beta_x v\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\beta_x xv - a_y y) \\ &= -a_y\end{aligned}\tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(\beta_x xv - a_y y) \\ &= \beta_x x\end{aligned}\tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(\beta_x xv - a_y y) \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w}(\beta_x xv - a_y y) \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv) \\ &= -\beta_x v\end{aligned}\tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv) \\ &= k_x\end{aligned}\tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv) \\
&= -u - \beta_x x - \beta_z z
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv) \\
&= -\beta_z v
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w}(k_x y + k_z w - uv - \beta_x xv - \beta_z zv) \\
&= k_z
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_z - \beta_z zv - d_z z) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_z - \beta_z zv - d_z z) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(\lambda_z - \beta_z zv - d_z z) \\
&= -\beta_z z
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_z - \beta_z zv - d_z z) \\
&= -\beta_z v - d_z
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w}(\lambda_z - \beta_z zv - d_z z) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\beta_z zv - a_w w) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\beta_z zv - a_w w) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(\beta_z z v - a_w w) \\ &= \beta_z z\end{aligned}\tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(\beta_z z v - a_w w) \\ &= \beta_z v\end{aligned}\tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w}(\beta_z z v - a_w w) \\ &= -a_w\end{aligned}\tag{4.52}$$

Dari hasil turunan Persamaan (4.28) sampai (4.52), dapat ditulis dalam bentuk matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta_x v - d_x & 0 & -\beta_x x & 0 & 0 \\ \beta_x v & -a_y & \beta_x x & 0 & 0 \\ -\beta_x v & k_x & -u - \beta_x x - \beta_z z & -\beta_z v & k_z \\ 0 & 0 & -\beta_z z & -\beta_z v - d_z & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z z & \beta_z v & -a_w \end{bmatrix}$$

4.5.1 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Setimbang Bebas Penyakit

Sebelumnya akan diberikan teorema sebagai berikut.

Teorema 4.5.1.1. [3] *Titik setimbang bebas penyakit stabil lokal asimtotik jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$*

Bukti :

Telah diketahui titik setimbang bebas penyakit adalah $I_0 = (x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) = (\frac{\lambda_x}{d_x}, 0, 0, \frac{\lambda_z}{d_z}, 0)$, maka

$$J(I_0) = \begin{bmatrix} -d_x & 0 & -\beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & -a_y & \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & k_x & -u - \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} - \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} & 0 & k_z \\ 0 & 0 & -\beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} & -d_z & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} & 0 & -a_w \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaan karakteristiknya, maka pada $J(I_0)$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga atas dengan cara Operasi Baris Elementer sebagai berikut.

$$\sim B_3 + \frac{k_x}{a_y} B_2$$

$$\sim B_3 + \frac{k_z}{a_w} B_5$$

$$\sim B_4 + \frac{\beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{-u - \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} - \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} \frac{k_x}{a_y} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \frac{k_z}{a_w}} B_3$$

$$\sim B_5 - \frac{\beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{-u - \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} - \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} \frac{k_x}{a_y} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \frac{k_z}{a_w}} B_3 +$$

$$J(I_0) = \begin{bmatrix} -d_x & 0 & -\beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & -a_y & \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u - \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} - \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} \frac{k_x}{a_y} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \frac{k_z}{a_w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_w \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J(I_0)| = 0$$

Sehingga

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -d_x & 0 \\ 0 & -a_y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} & 0 & 0 \\ \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} & 0 & 0 \\ -u - \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} - \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} \frac{k_x}{a_y} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \frac{k_z}{a_w} & 0 & 0 \\ 0 & -d_z & 0 \\ 0 & 0 & -a_w \end{bmatrix} = 0$$

maka

$$\begin{vmatrix} \lambda + d_x & 0 & -\beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + a_y & \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} - \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} \frac{k_x}{a_y} - \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \frac{k_z}{a_w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + d_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + a_w \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobian tersebut maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(\lambda + d_x)(\lambda + a_y) \left(\lambda + u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} - \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} \frac{k_x}{a_y} - \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \frac{k_z}{a_w} \right) (\lambda + d_z)(\lambda + a_w) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari dari akar karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -d_x < 0 \\ \lambda_2 &= -a_y < 0 \\ \lambda_3 &= - \left(u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \right) + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} \frac{k_x}{a_y} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \frac{k_z}{a_w} \\ &= \left(u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \right) \left(\frac{k_x}{a_y} \frac{\frac{\beta_x \lambda_x}{d_x}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} + \frac{k_z}{a_w} \frac{\frac{\beta_z \lambda_z}{d_z}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Dalam hal ini didefinisikan $\mathfrak{R}_0 = \left(\frac{k_x}{a_y} \frac{\beta_x \frac{\lambda_x}{d_x}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} + \frac{k_z}{a_w} \frac{\beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} \right)$. Jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, maka λ_3

akan bernilai negatif sehingga

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= -\left(u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}\right) + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} \frac{k_x}{a_y} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \frac{k_z}{a_w} < 0 \\ \lambda_4 &= -d_z < 0 \\ \lambda_5 &= -a_w < 0\end{aligned}$$

Karena nilai eigen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \text{ dan } \lambda_5)$ bernilai negatif pada bagian realnya maka titik setimbang $I_0 = (\frac{\lambda_x}{d_x}, 0, 0, \frac{\lambda_z}{d_z}, 0)$ stabil lokal asimtotik dan titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$.

4.5.2 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Setimbang Endemik

Telah diketahui bahwa titik setimbang endemik $I_1 = (x^*, y^*, v^*, z^*, w^*)$ dalam hal ini v^* selalu positif dengan

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{\lambda_x}{(\beta_x v^* + d_x)} \\ y^* &= \frac{\beta_x \lambda_x v^*}{(\beta_x v^* + d_x) a_y} \\ z^* &= \frac{\lambda_z}{(\beta_z v^* + d_z)} \\ w^* &= \frac{\beta_z \lambda_z v^*}{(\beta_z v^* + d_z) a_w}\end{aligned}$$

Pada titik setimbang $I_1 = (x^*, y^*, v^*, z^*, w^*)$ matrik Jacobiannya adalah

$$J(I_1) = \begin{bmatrix} -\beta_x v^* - d_x & 0 & -\beta_x x^* & 0 & 0 \\ \beta_x v^* & -a_y & \beta_x x^* & 0 & 0 \\ -\beta_x v^* & k_x & -u - \beta_x x^* - \beta_z z^* & -\beta_z v^* & k_z \\ 0 & 0 & -\beta_z z^* & -\beta_z v^* - d_z & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z z^* & \beta_z v^* & -a_w \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaan karakteristiknya, maka pada $J(I_1)$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga atas dengan cara Operasi Baris Elementer sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\sim B_3 + B_2 \\
&\sim B_2 - \frac{\beta_x v^*}{-\beta_x v^* - d_x} B_1 \\
&\sim B_3 - \frac{k_x - a_y}{-a_y} B_2 \\
&\sim B_3 + B_5 \\
&\sim B_5 - \frac{\beta_z v^*}{-\beta_z v^* - d_z} B_4 \\
&\sim B_3 - \frac{k_z - a_w}{-a_w} B_5 \\
&\sim B_4 + \frac{\beta_z z^*}{-u + \frac{k_x - a_y}{a_y} \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} + \frac{k_z - a_w}{a_w} \frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z}} B_3 \\
&\sim B_5 - \frac{\frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z}}{-u + \frac{k_x - a_y}{a_y} \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} + \frac{k_z - a_w}{a_w} \frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z}} B_3
\end{aligned}$$

Sehingga

$$J(I_1) = \begin{bmatrix} -\beta_x v^* - d_x & 0 & & & -\beta_x x^* \\ 0 & -a_y & & & \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} \\ 0 & 0 & -u + \frac{k_x - a_y}{a_y} \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} + \frac{k_z - a_w}{a_w} \frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z} & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & -\beta_z v^* - d_z & 0 \\ & & & 0 & -a_w \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J(I_1)| = 0$$

Sehingga

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\beta_x v^* - d_x & 0 \\ 0 & -a_y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - u + \frac{k_x - a_y}{a_y} \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} + \frac{k_z - a_w}{a_w} \frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z} \begin{bmatrix} -\beta_x x^* & 0 & 0 \\ \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_z v^* - d_z & 0 \\ 0 & 0 & -a_w \end{bmatrix} \right| = 0$$

Maka

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda + \beta_x v^* + d_x & 0 & -\beta_x x^* \\ 0 & \lambda + a_y & \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} \\ 0 & 0 & \lambda + u - \frac{k_x - a_y}{a_y} \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} - \frac{k_z - a_w}{a_w} \frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda + \beta_z v^* + d_z & 0 \\ 0 & \lambda + a_w \end{bmatrix} \right| = 0$$

Dari matriks Jacobian tersebut maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(\lambda + \beta_x v^* + d_x)(\lambda + a_y)\left(\lambda + u - \frac{k_x - a_y}{a_y} \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} - \frac{k_z - a_w}{a_w} \frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z}\right)(\lambda + \beta_z v^* + d_z)(\lambda + a_w) = 0$$

Sehingga akan diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya

sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\beta_x v^* - d_x < 0$$

$$\lambda_2 = -a_y < 0$$

$$\lambda_3 = -u + \frac{k_x - a_y}{a_y} \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} + \frac{k_z - a_w}{a_w} \frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z}$$

dimana $k_x \leq a_y$ dan $k_z \leq a_w$, maka

$$\lambda_3 = -u + \frac{k_x - a_y}{a_y} \frac{\beta_x x^* d_x}{\beta_x v^* + d_x} + \frac{k_z - a_w}{a_w} \frac{\beta_z z^* d_z}{\beta_z v^* + d_z} < 0$$

$$\lambda_4 = -\beta_z v^* - d_z < 0$$

$$\lambda_5 = -a_w < 0$$

Karena nilai eigen ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, dan λ_5) bernilai negatif pada bagian realnya maka berdasarkan akar akar karakteristik (nilai eigen) maka titik setimbang $I_1 = (x^*, y^*, v^*, z^*, w^*)$ stabil lokal asimtotik.

4.5.3 Kestabilan Asimtotik Global Titik Setimbang Bebas Penyakit

Kestabilan global pada titik setimbang bebas penyakit bisa diselidiki menggunakan fungsi Lyapunov. Sebelumnya akan diberikan teorema berikut:

Teorema 4.5.1. [3] *Jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan $(k_x - a_y)(k_z - a_w) > 0$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit I_0 stabil asimtotik global pada daerah Ω .*

Bukti :

Didefinisikan $U : \Omega \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$. dengan fungsi berikut :

$$U(x, y, v, z, w) = k_x y + a_y v + \frac{a_y k_z}{a_w} w \quad (4.53)$$

Fungsi U adalah fungsi Lyapunov karena memenuhi

- a. Jelas bahwa fungsi tersebut adalah fungsi U kontinu pada Ω . Kemudian turunan parsial pertama juga kontinu.
- b. Untuk sebarang $I = (x, y, v, z, w) \in \Omega$ dengan $I \neq I_0$ maka $U(I) > 0$, selanjutnya jika $I = I_0$ maka $U(I) = 0$.
- c. Turunan parsial fungsi U terhadap waktu adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= k_x \frac{dy}{dt} + a_y \frac{dv}{dt} + \frac{a_y k_z}{a_w} \frac{dw}{dt} \\
&= k_x (\beta_x x v - a_y y) + a_y (k_x y + k_z w - uv - \beta_x x v - \beta_z z v) + \\
&\quad \frac{a_y k_z}{a_w} (\beta_z z v - a_w w) \\
&= k_x \beta_x x v - k_x a_y y + k_x a_y y + a_y k_z w - a_y uv - a_y \beta_x x v \\
&\quad - a_y \beta_z z v + \frac{a_y k_z}{a_w} \beta_z z v - a_y k_z w \\
&= (k_x - a_y) \beta_x x v + a_y \beta_z z v \left(\frac{k_z}{a_w} - 1 \right) - a_y uv \\
&= \left((k_x - a_y) \beta_x x + a_y \beta_z z \left(\frac{k_z}{a_w} - 1 \right) - a_y u \right) v
\end{aligned}$$

Sehingga $\frac{\partial U}{\partial t} \leq 0$ ketika $(k_x - a_y) \leq 0$ dan $(k_z - a_w) \leq 0$.
Jika $(k_x - a_y) \geq 0$ dan $(k_z - a_w) \geq 0$, dengan menggunakan pertidaksamaan $x \leq \frac{\lambda_x}{d_x}$ dan $z \leq \frac{\lambda_z}{d_z}$, didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &\leq \left((k_x - a_y) \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + a_y \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \left(\frac{k_z}{a_w} - 1 \right) - a_y u \right) v \\
&= \left(a_y \left(\frac{k_x}{a_y} - 1 \right) \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + a_y \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \left(\frac{k_z}{a_w} - 1 \right) - a_y u \right) v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\frac{k_x}{a_y} - 1 \right) \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \left(\frac{k_z}{a_w} - 1 \right) - u \right) a_y v \\
&= \left(u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \right) \left(-1 + \frac{k_x}{a_y} \frac{\beta_x \frac{\lambda_x}{d_x}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{k_z}{a_w} \frac{\beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} \right) a_y v \\
&= \left(u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z} \right) (-1 + \mathfrak{R}_0) a_y v
\end{aligned}$$

yang berarti $\frac{\partial U}{\partial t}$ bernilai tak positif ketika $\mathfrak{R}_0 \leq 1$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $U(x, y, v, z, w)$ fungsi Lyapunov.

Telah diketahui bahwa $U(x, y, v, z, w)$ merupakan fungsi Lyapunov dan $\frac{\partial U}{\partial t} < 0$ jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan $(k_x - a_y)(k_z - a_w) > 0$. Selanjutnya akan ditentukan himpunan yang memenuhi sifat $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Jelas bahwa himpunan invarian terbesar dalam $H = \{I = (x, y, v, z, w) \in \Omega : \frac{\partial U}{\partial t} = 0\}$ adalah ketika $v = 0$ yang berakibat $y = 0$ dan $w = 0$. Pada himpunan ini sistem menjadi,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \lambda_x - d_x x \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0 \\
\frac{dz}{dt} &= \lambda_z - d_z z
\end{aligned}$$

Yang berarti himpunan invarian terbesarnya adalah $M = \{I_0\}$. Ini menunjukkan bahwa setiap solusi yang berawal dari nilai $v = 0$ akan menuju ke M atau titik bebas penyakit untuk $t \rightarrow \infty$. Sehingga, berdasarkan Definisi 2.5.3 titik kesetimbangan I_0 stabil asimtotik global pada Ω .

4.6 Penyelesaian Numerik dan simulasi

Setelah didapatkan titik setimbang bebas penyakit, titik setimbang endemik, dan stabilitas asimtotik lokal pada kedua titik setimbang tersebut, dilakukan simulasi numerik untuk menganalisa model HVD dan untuk mengetahui *error* antara nilai eksak dengan nilai numerik. Penyelesaian numerik yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah metode Runge Kutta orde empat. Metode Runge Kutta mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor tanpa memerlukan turunan-turunan tingkat tinggi. Metode Runge-kutta orde 4 adalah satu dari metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan h^4 . h adalah langkah waktu (*step size*).

Dimisalkan untuk nilai awal adalah sebagai berikut:

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$v(t_0) = v_0$$

$$z(t_0) = z_0$$

$$w(t_0) = w_0$$

Integrasi numerik dari Persamaan (4.1) sampai (4.5) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}(k_{1,v} + 2k_{2,v} + 2k_{3,v} + k_{4,v})$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(k_{1,z} + 2k_{2,z} + 2k_{3,z} + k_{4,z})$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_{1,w} + 2k_{2,w} + 2k_{3,w} + k_{4,w})$$

Dengan

$$\begin{aligned}
k_{1,x} &= hf(t_n, x_n, y_n, v_n, z_n, w_n) \\
&= h(\lambda_x - \beta_x x_n v_n - d_x x_n) \\
k_{1,y} &= hf(t_n, x_n, y_n, v_n, z_n, w_n) \\
&= h(\beta_x x_n v_n - a_y y_n) \\
k_{1,v} &= hf(t_n, x_n, y_n, v_n, z_n, w_n) \\
&= h(k_x y_n + k_z w_n - u v_n - \beta_x x_n v_n - \beta_z z_n v_n) \\
k_{1,z} &= hf(t_n, x_n, y_n, v_n, z_n, w_n) \\
&= h(\lambda_z - \beta_z z_n v_n - d_z z_n) \\
k_{1,w} &= hf(t_n, x_n, y_n, v_n, z_n, w_n) \\
&= h(\beta_z z_n v_n - a_w w_n) \\
k_{2,x} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2}, v_n + \frac{k_{1,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{1,z}}{2}, w_n + \frac{k_{1,w}}{2}\right) \\
&= h\left(\lambda_x - \beta_x \left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right) \left(v_n + \frac{k_{1,v}}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - d_x \left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right)\right) \\
k_{2,y} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2}, v_n + \frac{k_{1,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{1,z}}{2}, w_n + \frac{k_{1,w}}{2}\right) \\
&= h\left(\beta_x \left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right) \left(v_n + \frac{k_{1,v}}{2}\right) - a_y \left(y_n + \frac{k_{1,y}}{2}\right)\right) \\
k_{2,v} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2}, v_n + \frac{k_{1,v}}{2}, \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z_n + \frac{k_{1,z}}{2}, w_n + \frac{k_{1,w}}{2} \Big) \\
&= h \left(k_x \left(y_n + \frac{k_{1,y}}{2} \right) + k_z \left(w_n + \frac{k_{1,w}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - u \left(v_n + \frac{k_{1,v}}{2} \right) - \beta_x \left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{1,v}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \beta_z \left(z_n + \frac{k_{1,z}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{1,v}}{2} \right) \right) \\
k_{2,z} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2}, v_n + \frac{k_{1,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{1,z}}{2}, w_n + \frac{k_{1,w}}{2} \right) \\
&= h \left(\lambda_z - \beta_z \left(z_n + \frac{k_{1,z}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{1,v}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - d_z \left(z_n + \frac{k_{1,z}}{2} \right) \right) \\
k_{2,w} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2}, v_n + \frac{k_{1,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{1,z}}{2}, w_n + \frac{k_{1,w}}{2} \right) \\
&= h \left(\beta_z \left(z_n + \frac{k_{1,z}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{1,v}}{2} \right) - a_w \left(w_n + \frac{k_{1,w}}{2} \right) \right) \\
k_{3,x} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2}, v_n + \frac{k_{2,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{2,z}}{2}, w_n + \frac{k_{2,w}}{2} \right) \\
&= h \left(\lambda_x - \beta_x \left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{2,v}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - d_x \left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,y} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2}, v_n + \frac{k_{2,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{2,z}}{2}, w_n + \frac{k_{2,w}}{2} \right) \\
&= h \left(\beta_x \left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{2,v}}{2} \right) - a_y \left(y_n + \frac{k_{2,y}}{2} \right) \right) \\
k_{3,v} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2}, v_n + \frac{k_{2,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{2,z}}{2}, w_n + \frac{k_{2,w}}{2} \right) \\
&= h \left(k_x \left(y_n + \frac{k_{2,y}}{2} \right) + k_z \left(w_n + \frac{k_{2,w}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - u \left(v_n + \frac{k_{2,v}}{2} \right) - \beta_x \left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{2,v}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \beta_z \left(z_n + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{2,v}}{2} \right) \right) \\
k_{3,z} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2}, v_n + \frac{k_{2,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{2,z}}{2}, w_n + \frac{k_{2,w}}{2} \right) \\
&= h \left(\lambda_z - \beta_z \left(z_n + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{2,v}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - d_z \left(z_n + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \right) \\
k_{3,w} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2}, v_n + \frac{k_{2,v}}{2}, \right. \\
&\quad \left. z_n + \frac{k_{2,z}}{2}, w_n + \frac{k_{2,w}}{2} \right) \\
&= h \left(\beta_z \left(z_n + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \left(v_n + \frac{k_{2,v}}{2} \right) - a_w \left(w_n + \frac{k_{2,w}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,x} &= hf(t_n + h, x_n + k_{3,x}, y_n + k_{3,y}, v_n + k_{3,v}, z_n + k_{3,z}, \\
&\quad w_n + k_{3,w}) \\
&= h(\lambda_x - \beta_x(x_n + k_{3,x})(v_n + k_{3,v}) - d_x(x_n + k_{3,x})) \\
k_{4,y} &= hf(t_n + h, x_n + k_{3,x}, y_n + k_{3,y}, v_n + k_{3,v}, z_n + k_{3,z}, \\
&\quad w_n + k_{3,w}) \\
&= h(\beta_x(x_n + k_{3,x})(v_n + k_{3,v}) - a_y(y_n + k_{3,y})) \\
k_{4,v} &= hf(t_n + h, x_n + k_{3,x}, y_n + k_{3,y}, v_n + k_{3,v}, z_n + k_{3,z}, \\
&\quad w_n + k_{3,w}) \\
&= h(k_x(y_n + k_{3,y}) + k_z(w_n + k_{3,w}) - u(v_n + k_{3,v}) \\
&\quad - \beta_x(x_n + k_{3,x})(v_n + k_{3,v}) - \beta_z(z_n + k_{3,z})(v_n) + k_{3,v}) \\
k_{4,z} &= hf(t_n + h, x_n + k_{3,x}, y_n + k_{3,y}, v_n + k_{3,v}, z_n + k_{3,z}, \\
&\quad w_n + k_{3,w}) \\
&= h(\lambda_z - \beta_z(z_n + k_{3,z})(v_n + k_{3,v}) - d_z(z_n + k_{3,z})) \\
k_{4,w} &= hf(t_n + h, x_n + k_{3,x}, y_n + k_{3,y}, v_n + k_{3,v}, z_n + k_{3,z}, \\
&\quad w_n + k_{3,w}) \\
&= h(\beta_z(z_n + k_{3,z})(v_n + k_{3,v}) - a_w(w_n + k_{3,w}))
\end{aligned}$$

Parameter yang digunakan dalam simulasi untuk keadaan bebas penyakit beserta nilai awal pada setiap populasi disajikan dalam Tabel 4.1 dan 4.2 [5]. Dengan memasukkan nilai parameter seperti dalam tabel tersebut, akan menghasilkan nilai $\mathfrak{R}_0 = 0.1999 - 0.9916$, diharapkan menghasilkan titik kesetimbangan yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya yaitu jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan akan berada pada kesetimbangan bebas penyakit. Populasi *Susceptible* sel hati, *Infected* sel hati, populasi sel virus, *Susceptible* sel darah, serta *Infected* sel darah berturut-turut pada kesetimbangan bebas penyakit adalah $\left(\frac{10^9}{3}, 0, 0, 10^4, 0\right)$ saat $t \rightarrow \infty$.

Tabel 4.1: Nilai Parameter Kestimbangan Bebas Penyakit

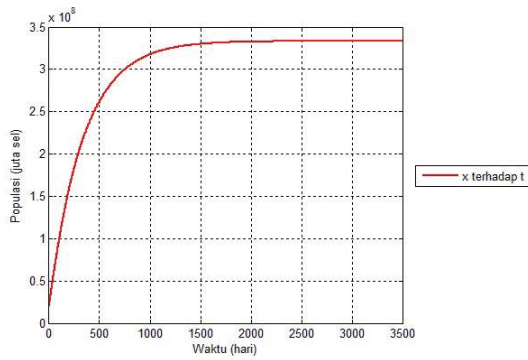
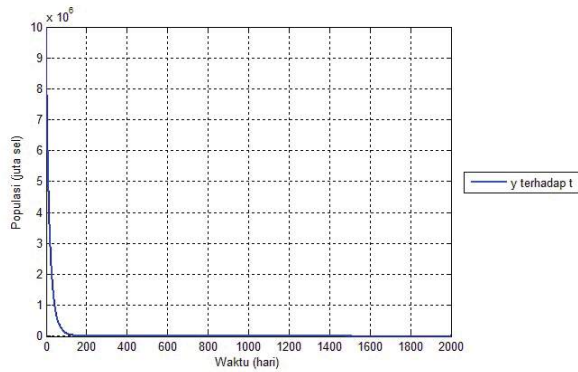
Parameter	Nilai Parameter
λ_x	10^6
λ_z	10^2
β_x	$2(10^{-8})$
β_z	$1.8(10^{-6})$
d_x	0.003
d_z	0.01
a_y	0.08
a_w	0.64
k_x	0.01-0.083
k_z	25
u	1

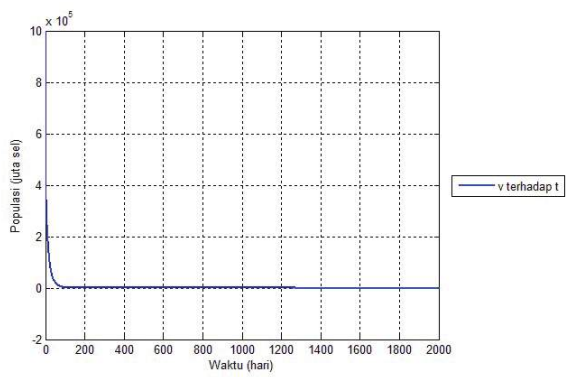
Tabel 4.2: Nilai awal masing masing populasi

Populasi ketika t=0	Nilai awal (sel)
x	$2(10^7)$
y	10^7
v	10^6
z	$2(10^3)$
w	10^3

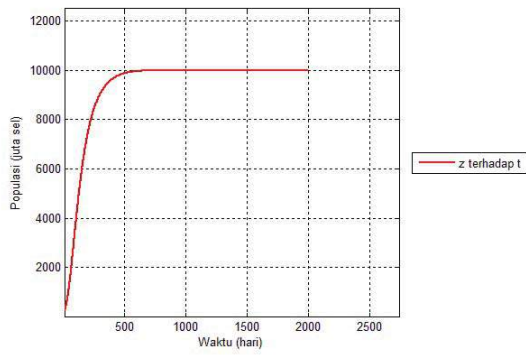
Simulasi pada model ini dilakukan dengan metode Runge-Kutta. Dengan nilai input parameter pada Tabel 4.1 dan 4.2 didapatkan grafik Bebas Penyakit dari masing-masing populasi terhadap waktu pada Gambar 4.2.

Gambar 4.2: Grafik Kestabilan Bebas Penyakit

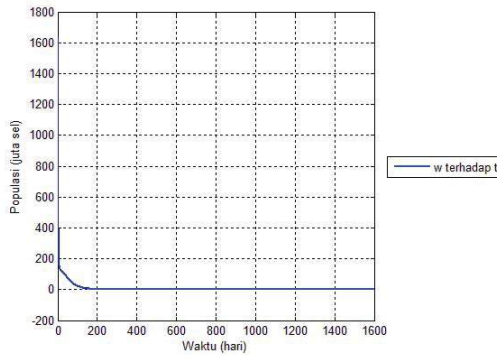
(a) Kestabilan x (b) Kestabilan y



(c) Kestabilan v



(d) Kestabilan z

(e) Kestabilan w

Gambar 4.2 merupakan hasil perhitungan numerik Runge-Kutta. Laju pertumbuhan masing-masing populasi dijelaskan sebagai berikut:

- * Laju populasi *Susceptible* sel hati
Populasi *Susceptible* sel hati naik dari hari pertama dan mulai stabil ketika hari ke 1600 menuju titik setimbang $x = \frac{10^9}{3} = 3,3 \times 10^8$ dan jumlah populasi *Susceptible* sel hati dalam tubuh pasien akan mendekati 333 juta sel mulai dari hari ke 3456.
- * Laju Populasi *Infected* sel hati
Populasi *Infected* sel hati menurun mulai hari pertama dan mulai stabil menuju titik $y = 0$ yang berarti tidak ada populasi sel hati yang terinfeksi dalam tubuh pasien mulai hari ke 1500.
- * Laju Populasi sel Virus
Populasi sel virus menurun mulai dari hari pertama dan mulai stabil menuju titik $v = 0$ yang berarti tidak ada populasi sel virus dalam tubuh pasien mulai hari ke 1250.

* Laju Populasi *Susceptible* sel darah

Populasi *Susceptible* sel darah naik dari hari pertama dan mulai stabil ketika hari ke 700 menuju titik setimbang $z = 10^4 = 10.000$ dan jumlah populasi *Susceptible* sel darah dalam tubuh pasien akan mendekati 10.000 sel mulai dari hari ke 1200.

* Laju Populasi *Infected* sel darah

Populasi *Infected* sel darah menurun mulai hari pertama dan mulai stabil menuju titik $w = 0$ yang berarti tidak ada populasi sel darah yang terinfeksi dalam tubuh pasien mulai hari ke 400.

Perubahan nilai k_x tidak menyebabkan grafik kestabilan berubah ketika nilai \mathfrak{R}_0 kurang dari satu. Terlihat dari hasil simulasi error yang terjadi sangatlah kecil antara nilai perhitungan numerik dan eksak.

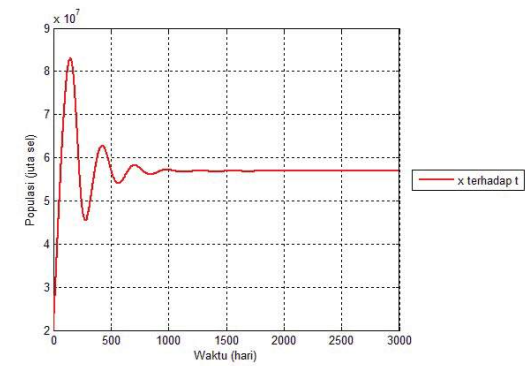
Parameter yang digunakan dalam simulasi untuk keadaan endemik beserta nilai awal pada setiap populasi disajikan dalam Tabel 4.3 dan 4.2 [5]. Dengan memasukkan nilai parameter seperti dalam tabel tersebut, akan menghasilkan nilai $\mathfrak{R}_0 = 1,7181$, diharapkan menghasilkan titik ketimbangan yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya yaitu jika $\mathfrak{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan akan berada pada kesetimbangan endemik. Populasi *Susceptible* sel hati, *Infected* sel hati, populasi sel virus, *Susceptible* sel darah, serta *Infected* sel darah berturut-turut pada kesetimbangan endemik adalah $(5.6845(10^7), 1.0368(10^7), 7.2955(10^5), 75.5719, 155.0692)$ saat $t \rightarrow \infty$.

Tabel 4.3: Nilai Parameter kesetimbangan endemik 1

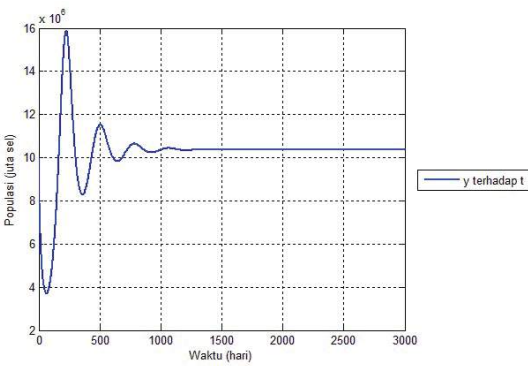
Parameter	Nilai Parameter
λ_x	10^6
λ_z	10^2
β_x	$2(10^{-8})$
β_z	$1.8(10^{-6})$
d_x	0.003
d_z	0.01
a_y	0.08
a_w	0.64
k_x	0.15
k_z	25
u	1

Dengan nilai input parameter pada Tabel 4.3 didapatkan grafik Endemik pada Gambar 4.3 .

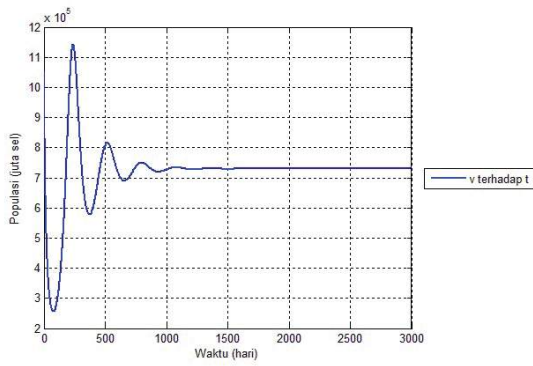
Gambar 4.3: Grafik Kestabilan Endemik 1



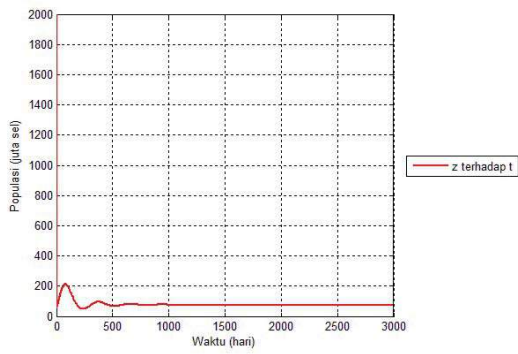
(a) Kestabilan x



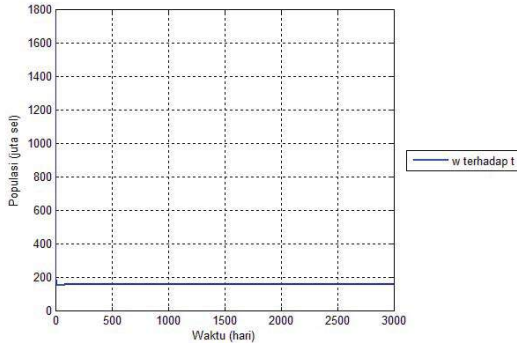
(b) Kestabilan y



(c) Kestabilan v



(d) Kestabilan z

(e) Kestabilan w

Laju pertumbuhan dari masing-masing sub populasi sebagai berikut :

- * Laju populasi *Susceptible* sel hati

Populasi *Susceptible* sel hati mengalami kenaikan yang cukup tajam lalu mengalami penurunan yang lebih sedikit dari kenaikan awal sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 1700 menuju titik setimbang $x = 5.6845(10^7)$ dan jumlah populasi *Susceptible* hati dalam tubuh pasien akan mendekati $x = 5.6847(10^7)$ sel mulai dari hari ke 2600.

- * Laju Populasi *Infected* sel hati

Populasi *Infected* sel hati mengalami penurunan lalu mengalami kenaikan yang cukup tajam sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 1250 menuju titik setimbang $y = 1.0368(10^7)$ dan jumlah populasi *Infected* sel hati dalam tubuh pasien akan mendekati $y = 1.03684(10^7)$ sel mulai dari hari ke 2400.

* Laju Populasi sel Virus

Populasi sel virus mengalami penurunan lalu mengalami kenaikan yang cukup tajam sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 1600 menuju titik setimbang $v = 7.2955(10^5)$ dan jumlah populasi sel virus dalam tubuh pasien akan mendekati $v = 7.2958 * (10^5)$ sel mulai dari hari ke 2300.

* Laju Populasi *Susceptible* sel darah

Populasi *Susceptible* sel darah mengalami penurunan yang cukup tajam lalu mengalami kenaikan yang sangat kecil sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 1290 menuju titik setimbang $z = 75.5719$ dan jumlah populasi *Susceptible* sel darah dalam tubuh pasien akan mendekati $z = 75.5755$ sel mulai dari hari ke 1980.

* Laju Populasi *Infected* sel darah

Populasi *Infected* sel darah mengalami penurunan yang cukup tajam lalu mengalami kenaikan yang sangat kecil sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 600 menuju titik setimbang $w = 155.0692$ dan jumlah populasi *Infected* sel darah dalam tubuh pasien akan mendekati $w = 155.0682$ sel mulai dari hari ke 1400.

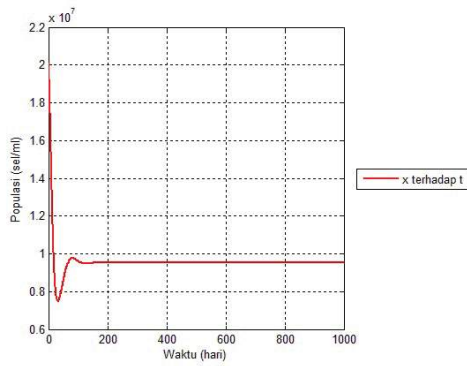
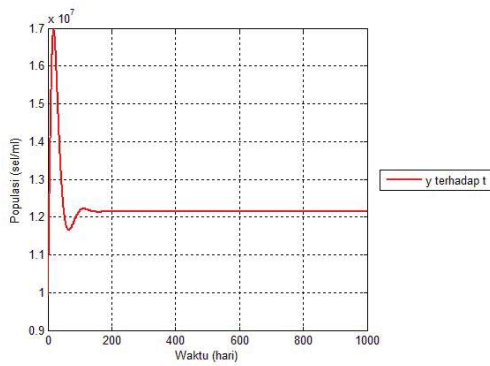
Selanjutnya dengan menggunakan nilai parameter berikut

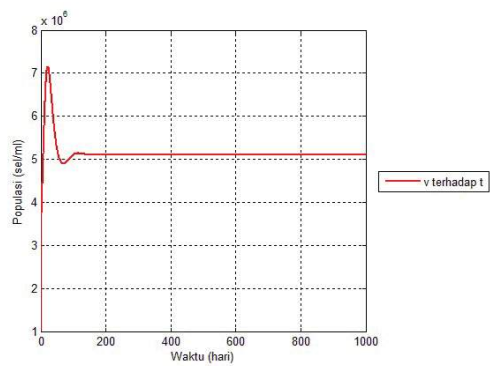
Tabel 4.4: Nilai Parameter kesetimbangan endemik 2

Parameter	Nilai Parameter
λ_x	10^6
λ_z	10^2
β_x	$2(10^{-8})$
β_z	$1.8(10^{-6})$
d_x	0.003
d_z	0.01
a_y	0.08
a_w	0.64
k_x	0.5
k_z	25
u	1

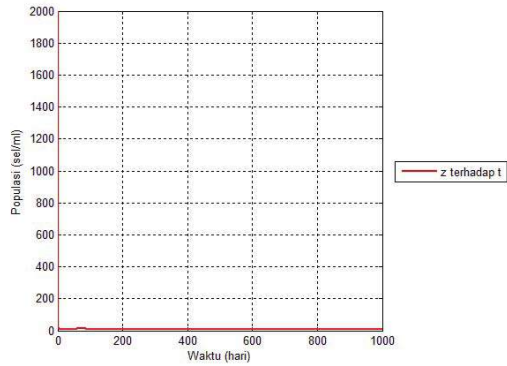
Dengan memasukkan nilai parameter seperti dalam Tabel 4.4 dan nilai awal pada Tabel 4.2, akan menghasilkan nilai $\mathfrak{R}_0 = 5.5135$, diharapkan menghasilkan titik ketimbangan yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya yaitu jika $\mathfrak{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan akan berada pada kesetimbangan endemik. Populasi *Susceptible* sel hati, *Infected* sel hati, populasi sel virus, *Susceptible* sel darah, serta *Infected* sel darah berturut-turut pada kesetimbangan endemik adalah $(9.5167(10^6), 1.2143(10^7), 5.1039(10^6), 10.8731, 156.0801)$ saat $t \rightarrow \infty$. Dengan nilai input parameter pada Tabel 4.4 didapatkan grafik Endemik pada Gambar 4.4.

Gambar 4.4: Grafik Kestabilan Endemik 2

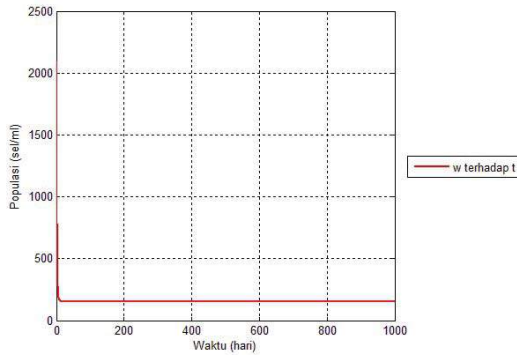
(a) Kestabilan x (b) Kestabilan y



(c) Kestabilan v



(d) Kestabilan z



(e) Kestabilan w

Laju pertumbuhan dari masing-masing sub populasi sebagai berikut :

* Laju populasi *Susceptible* sel hati

Populasi *Susceptible* sel hati mengalami penurunan yang cukup tajam lalu mengalami kenaikan yang lebih sedikit dari kenaikan awal sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 400 menuju titik setimbang $x = 9.5167(10^6)$ dan jumlah populasi *Susceptible* hati dalam tubuh pasien akan mendekati $x = 9.5167(10^6)$ sel mulai dari hari ke 450.

* Laju Populasi *Infected* sel hati

Populasi *Infected* sel hati mengalami kenaikan yang cukup tajam lalu mengalami penurunan sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 590 menuju titik setimbang $y = 1.2143(10^7)$ dan jumlah populasi *Infected* sel hati dalam tubuh pasien akan mendekati $y = 1.2143(10^7)$ sel mulai dari hari ke 640.

* Laju Populasi sel Virus

Populasi sel virus mengalami kenaikan yang cukup tajam lalu mengalami penurunan sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 570 menuju titik setimbang $v = 5.1039(10^6)$ dan jumlah populasi sel virus dalam tubuh pasien akan mendekati $v = 5.1039(10^6)$ sel mulai dari hari ke 600.

* Laju Populasi *Susceptible* sel darah

Populasi *Susceptible* sel darah mengalami penurunan yang cukup tajam lalu mengalami kenaikan yang sangat kecil sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 592 menuju titik setimbang $z = 10.8731$ dan jumlah populasi *Susceptible* sel darah dalam tubuh pasien akan mendekati $z = 10.8731$ sel mulai dari hari ke 610.

* Laju Populasi *Infected* sel darah

Populasi *Infected* sel darah mengalami penurunan yang cukup tajam lalu mengalami kenaikan yang sangat kecil sejak hari pertama. Grafik mengalami osilasi sampai stabil pada hari ke 610 menuju titik setimbang $w = 156.0801$ dan jumlah populasi *Infected* sel darah dalam tubuh pasien akan mendekati $w = 156.0801$ sel mulai dari hari ke 665.

Perubahan nilai k_x menyebabkan grafik kestabilan berubah ketika nilai \mathfrak{R}_0 lebih dari satu. Nilai x dan z menurun sedangkan nilai lainnya naik. Terlihat dari hasil simulasi error yang terjadi sangatlah kecil antara nilai perhitungan numerik dan eksak.

4.7 Analisis Bifurkasi

Dalam sub bab ini akan dibahas mengenai bagaimana menentukan kurva bifurkasi dalam model HVD. Dengan menggunakan titik kesetimbangan endemik $h(v^*)$ untuk mencari Persamaan \mathfrak{R}_0 yang optimum untuk membuat kurva bifurkasinya sehingga untuk \mathfrak{R}_0 yang lebih kecil dari nilai optimum tidak terjadi infeksi virus dalam tubuh. Diketahui $h(v^*)$ sebagai berikut

$$h(v^*) = Av^{*2} + Bv^* + C = 0$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= u\beta_x\beta_z \\ B &= u\beta_x d_z + u\beta_z d_x - \frac{k_x\lambda_x\beta_x\beta_z}{a_y} + \lambda_x\beta_x\beta_z - \frac{k_z\beta_x\lambda_z\beta_z}{a_w} \\ &\quad + \lambda_z\beta_x\beta_z, \\ C &= ud_x d_z - \frac{k_x\lambda_x\beta_x d_z}{a_y} + \lambda_x\beta_x d_z - \frac{k_z\lambda_z\beta_z d_x}{a_w} + \lambda_z\beta_z d_x \end{aligned}$$

Jelas bahwa koefisien A selalu bernilai positif. Untuk koefisien C,

$$\begin{aligned} C &= ud_x d_z - \frac{k_x\lambda_x\beta_x d_z}{a_y} + \lambda_x\beta_x d_z - \frac{k_z\lambda_z\beta_z d_x}{a_w} + \lambda_z\beta_z d_x \\ &= ud_x d_z + \lambda_x\beta_x d_z + \lambda_z\beta_z d_x \left(1 - \frac{k_x}{a_y} \frac{\beta_x \frac{\lambda_x}{d_x}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{k_z}{a_w} \frac{\beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} \right) \\ &= ud_x d_z + \lambda_x\beta_x d_z + \lambda_z\beta_z d_x (1 - \mathfrak{R}_0) \end{aligned}$$

sehingga koefisien C bergantung pada nilai \mathfrak{R}_0 . Apabila nilai $\mathfrak{R}_0 < 1$ maka C akan bernilai positif, sebaliknya akan bernilai

negatif. Karena $A > 0$ maka penyelesaian Persamaan diatas bergantung pada nilai B dan C agar bernilai positif. Untuk $\Re_0 > 1$ akan menghasilkan dua akar persamaan, salah satunya bernilai positif, sedangkan lainnya negatif.

Dengan mensubstitusikan $\Re_0 = 1$ pada Persamaan $h(v^*)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} h(v^*) &= Av^{*2} + Bv^* + C = 0 \\ &= Av^{*2} + Bv^* + (ud_x d_z + \lambda_x \beta_x d_z + \lambda_z \beta_z d_x)(1 - 1) \\ &= Av^{*2} + Bv^* \end{aligned}$$

Karena $h(v^*) = 0$ maka

$$\begin{aligned} Av^{*2} + Bv^* &= 0 \\ v^*(Av^* + B) &= 0 \end{aligned}$$

Karena $v^* \neq 0$ maka $(Av^* + B) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} (Av^* + B) &= 0 \\ v^* &= -\frac{B}{A} \end{aligned}$$

Hasil di atas memiliki penyelesaian tak nol, yaitu $v^* = -\frac{B}{A}$ jika dan hanya jika $B < 0$. Untuk $B < 0$ terdapat penyelesaian positif untuk $\Re_0 = 1$. Hal ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan tersebut bergantung pada \Re_0 dan terdapat interval terbuka yang memiliki dua akar persamaan positif, yaitu

$$\begin{aligned} Av^{*2} + Bv^* + C &= 0 \\ (v^*)_{1,2} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{aligned}$$

Sehingga

$$v_1^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \text{ dan } v_2^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Untuk $C > 0$ dan $\sqrt{B^2 - 4AC} < 0$ atau $B \geq 0$, maka Persamaan $h(v^*)$ menghasilkan penyelesaian tak positif.

Selanjutnya akan dicari persamaan bifurkasi mundur dengan cara mencari titik optimum dari Persamaan $h(v^*)$ kemudian mensubstitusikan hasil ke dalam Persamaan $h(v^*) = 0$ untuk memperoleh nilai \Re_c .

Untuk mencari titik optimum dari Persamaan $h(v^*)$ dengan cara menurunkan fungsi Persamaan $h(v^*)$ terhadap v^* sama dengan nol, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(v^*)}{\partial v^*} &= 0 \\ \frac{\partial (Av^{*2} + Bv^* + C)}{\partial v^*} &= 0 \\ 2Av^* + B &= 0 \\ v^* &= -\frac{B}{2A}\end{aligned}\tag{4.54}$$

Kemudian mensubstitusikan Persamaan (4.57) ke dalam Persamaan

$$\begin{aligned}h(v^*) &= 0 \\ Av^{*2} + Bv^* + C &= 0 \\ A\left(-\frac{B}{2A}\right)^2 + B\left(-\frac{B}{2A}\right) + C &= 0 \\ \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C &= 0 \\ \frac{B^2}{4A} &= C \\ \frac{B^2}{4A} &= ud_x d_z + \lambda_x \beta_x d_z + \lambda_z \beta_z d_x (1 - \Re_0) = 0 \\ \frac{B^2}{4A(ud_x d_z + \lambda_x \beta_x d_z + \lambda_z \beta_z d_x)} &= (1 - \Re_0)\end{aligned}$$

$$\mathfrak{R}_0 = 1 - \frac{B^2}{4A(ud_x d_z + \lambda_x \beta_x d_z + \lambda_z \beta_z d_x)}$$

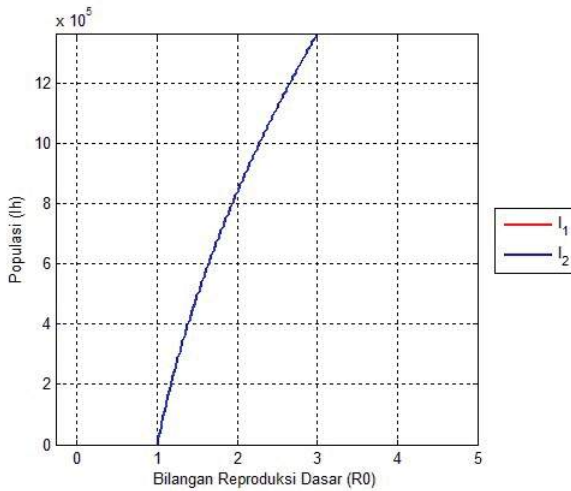
\mathfrak{R}_0 adalah penyelesaian untuk nilai kritis dari Persamaan di atas dinotasikan \mathfrak{R}_c sehingga $\mathfrak{R}_c = 1 - \frac{B^2}{4A(ud_x d_z + \lambda_x \beta_x d_z + \lambda_z \beta_z d_x)}$. Bifurkasi mundur terjadi ketika \mathfrak{R}_0 ada dan $\mathfrak{R}_c < \mathfrak{R}_0$ dengan batasan bahwa diskriminan dari akar Persamaan $h(v^*)$ positif, sehingga diperoleh $\mathfrak{R}_c < \mathfrak{R}_0 < 1$.

Setelah diperoleh \mathfrak{R}_c, v_1^* , dan v_2^* akan disimulasikan yang menghasilkan kurva bifurkasi dengan sumbu (x,y) yaitu $(\mathfrak{R}_0, \text{Populasi Virus})$. Nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 4.5: Nilai Parameter Endemik

Parameter	Nilai Parameter
λ_x	10^6
λ_z	10^2
β_x	$2(10^{-8})$
β_z	$1.8(10^{-6})$
d_x	0.003
d_z	0.03
a_y	0.08
a_w	0.42
k_x	0.11
k_z	25
u	1

Gambar 4.5: Kurva Bifurkasi Maju



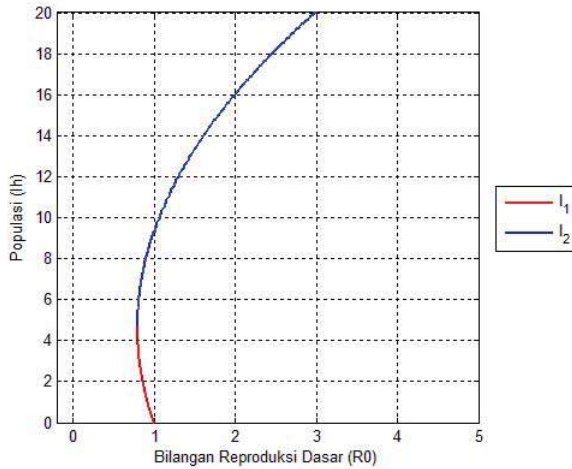
Akan dihasilkan kurva bifurkasi pada Gambar 4.5 . Gambar 4.5 menunjukkan telah terjadi bifurkasi maju untuk $\mathfrak{R}_0 > 1$. Terdapat satu titik setimbang endemik dan titik setimbang bebas penyakit yang tidak stabil. Pada saat $\mathfrak{R}_0 = 1$ terjadi bifurkasi transkritikal. Pada saat $\mathfrak{R}_0 < 1$ tidak terjadi penyebaran penyakit dalam tubuh (bebas penyakit), sedangkan $\mathfrak{R}_0 > 1$ terdapat titik endemik stabil.

Selanjutnya dengan menggunakan nilai parameter pada tabel berikut :

Tabel 4.6: Nilai Parameter Bebas Penyakit

Parameter	Nilai Parameter
λ_x	10
λ_z	10
β_x	0.2
β_z	0.075
d_x	0.5
d_z	0.5
a_y	0.4
a_w	0.1
k_x	0.1
k_z	0.36
u	1

Gambar 4.6: Kurva Bifurkasi Mundur



Akan dihasilkan kurva bifurkasi pada Gambar 4.6 . Gambar 4.6 menunjukkan terjadinya bifurkasi mundur untuk $\mathfrak{R}_0 < 1$ sehingga diperoleh tiga titik tetap, yang terdiri dari titik setimbang bebas penyakit, titik setimbang endemik stabil, dan titik setimbang endemik tidak stabil. Pada saat $\mathfrak{R}_0 = 1$ terjadi bifurkasi transkritikal, sedangkan pada titik 0,799 terjadi bifurkasi *saddle node*. Pada saat $\mathfrak{R}_0 < 0,799$ tidak terjadi penyebaran penyakit dalam tubuh (bebas penyakit), sedangkan $0,799 < \mathfrak{R}_0 < 1$ ada dua titik kesetimbangan endemik, satu titik bersifat stabil (warna biru) dan yang lain tidak stabil (warna merah) dan juga satu titik kesetimbangan bebas penyakit stabil dan untuk $\mathfrak{R}_0 > 1$ titik endemik stabil sangat besar sehingga penyebaran virus dalam tubuh semakin sulit diatasi dan terdapat titik setimbang bebas penyakit yang tidak stabil.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Diperoleh titik kesetimbangan dan kestabilan lokal sebagai berikut:

Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$I_0 = (x_0, y_0, v_0, z_0, w_0) = \left(\frac{\lambda_x}{d_x}, 0, 0, \frac{\lambda_z}{d_z}, 0\right)$$

dan Titik kesetimbangan endemik

$$I_1 = (x^*, y^*, v^*, z^*, w^*)$$

dengan

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{\lambda_x}{(\beta_x v^* + d_x)} \\y^* &= \frac{\beta_x \lambda_x v^*}{(\beta_x v^* + d_x) a_y} \\z^* &= \frac{\lambda_z}{(\beta_z v^* + d_z)} \\w^* &= \frac{\beta_z \lambda_z v^*}{(\beta_z v^* + d_z) a_w}\end{aligned}$$

$$h(v^*) = Av^{*2} + Bv^* + C = 0$$

dimana

$$A = u\beta_x\beta_z,$$

$$B = u\beta_x d_z + u\beta_z d_x - \frac{k_x \lambda_x \beta_x \beta_z}{a_y} + \lambda_x \beta_x \beta_z$$

$$- \frac{k_z \beta_x \lambda_z \beta_z}{a_w} + \lambda_z \beta_x \beta_z,$$

$$C = u d_x d_z - \frac{k_x \lambda_x \beta_x d_z}{a_y} + \lambda_x \beta_x d_z - \frac{k_z \lambda_z \beta_z d_x}{a_w} + \lambda_z \beta_z d_x$$

dan bilangan reproduksi dasarnya adalah

$$\mathfrak{R}_0 = \left(\frac{k_x}{a_y} \frac{\beta_x \frac{\lambda_x}{d_x}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} + \frac{k_z}{a_w} \frac{\beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}}{u + \beta_x \frac{\lambda_x}{d_x} + \beta_z \frac{\lambda_z}{d_z}} \right)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal.

Didapatkan kestabilan global pada titik setimbang bebas penyakit jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan $(k_x - a_y)(k_z - a_w) \geq 0$ dengan menerapkan fungsi Lyapunov

$$U(x, y, v, z, w) = k_x y + a_y v + \frac{a_y k_z}{a_w} w$$

2. Simulasi model HVD dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 menghasilkan grafik yang akurat dengan error kecil. Pada titik kesetimbangan bebas penyakit didapatkan nilai eksak $(x, y, v, z, w) = \left(\frac{10^9}{3}, 0, 0, 10^4, 0 \right)$ dan grafik kestabilan yang dihitung menggunakan pendekatan numerik menunjukkan

hasil yang relatif sama yaitu $(x, y, v, z, w) = (3, 333333(10^8), 0, 0, 10^4, 0)$. Pada titik kesetimbangan endemik pertama didapatkan nilai eksak $(x, y, v, z, w) = (5.6845(10^7), 1.0368(10^7), 7.2955(10^5), 75.5719, 155.0692)$ dan grafik kestabilan yang dihitung menggunakan pendekatan numerik menunjukkan hasil yang relatif sama yaitu $(x, y, v, z, w) = (5.6847(10^7), 1.03685(10^7), 7.2958(10^5), 75.5755, 155.0682)$. Perubahan nilai k_x tidak menyebabkan grafik kestabilan berubah ketika nilai \mathfrak{R}_0 kurang dari satu tetapi grafik kestabilan berubah ketika \mathfrak{R}_0 lebih dari satu. Selanjutnya fenomena bifurkasi mundur dipengaruhi oleh perubahan nilai \mathfrak{R}_0 yang mempengaruhi nilai A, B, dan C sehingga nilai titik puncaknya pun berubah. Bifurkasi mundur terjadi ketika nilai $C > 0$ atau $\mathfrak{R}_0 < 1$, $B < 0$, dan $B^2 - 4AC > 0$. Bifurkasi mundur menyebabkan nilai $R_0 < 1$ yang menunjukkan bahwa transplantasi hati sebagai bentuk pengobatan ternyata kurang efektif dalam menghilangkan virus hepatitis dalam tubuh. Akibatnya virus menyebar kembali dalam tubuh.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini tidak dibahas mengenai analisis kestabilan global pada titik kesetimbangan endemik maka untuk selanjutnya bisa dilakukan analisis kestabilan global pada titik kesetimbangan endemik dan kendali optimal pada model sebagai upaya pengendalian dan pencegahannya.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Emiliani, C. 1993. **Extinction and viruses**. BioSystems no.31: 155-159.
- [2] World Health Organization. 2013. **Global Policy report on the prevention and control of viral hepatitis**. Geneva. WHO press.
- [3] Qesmi R., Wu J., Wu Jianwong, Hefferan Jane M. 2010. **Influence of backward bifurcation in a model of hepatitis B and C viruses**. Mathematical Bioscience, No.224, 118-125.
- [4] Anton H., Rorres C. 2005. **Elementary Linear Algebra 9th edition**. John Wiley & Sons, Inc.
- [5] Thampi A.V. , Bolker, M.B. 2013. **Backward Bifurcations in Within Host HBV/HCV Models**. https://www.math.mcmaster.ca/ms/images/Thampi_2013.pdf
- [6] Subiono. 2013. **Sistem Linear dan Kontrol Optimal**. Surabaya. Subiono Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
- [7] Wiggins, S. 2003. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos Second Edition**. New York. Springer.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

LAMPIRAN

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

LAMPIRAN A

Source Code Kurva Kestabilan

```
close all;
clear all;
clc;
% % R_0>1
%     lamda1=10^6;
%     lamda2=10^2;
%     beta1=2*(10^(-8));
%     beta2=1.8*(10^(-6));
%     d1=0.003;
%     d2=0.01;
%     a1=0.08;
%     a2=0.64;
%     p1=0.15;
%     p2=25;
%     u=1;

%     lamda1=10^6;
%     lamda2=10^2;
%     beta1=2*(10^(-8));
%     beta2=1.8*(10^(-6));
%     d1=0.003;
%     d2=0.01;
%     a1=0.08;
%     a2=0.64;
%     p1=0.5;
%     p2=25;
%     u=1;
```

```

%      R_0<1
lamda1=10^6;
lamda2=10^2;
beta1=2*(10^(-8));
beta2=1.8*(10^(-6));
d1=0.003;
d2=0.01;
a1=0.08;
a2=0.64;
p1=0.06;
p2=25;
u=1;

h =0.1;
R=(p1/a1)*(((beta1*lamda1)/d1)/(u+...
((beta2*lamda2)/d2)+((beta1*lamda1)/d1)))+...
(p2/a2)*(((beta2*lamda2)/d2)/(u+...
((beta2*lamda2)/d2)+((beta1*lamda1)/d1)))

x(1)=2*10^7;
y(1)=10^7;
v(1)=10^6;
z(1)=2*10^3;
w(1)=10^3;

N=35000;

for i=1:N

%Step 1
K1_x(i)= h*((lamda1)-(beta1*x(i)*v(i))-(d1*x(i)));
K1_y(i)= h*((beta1*x(i)*v(i))-(a1*y(i)));

```

```

K1_v(i)= h*((p1*y(i))+(p2*w(i))-(u*v(i))-...
((beta1*x(i)*v(i))-(beta2*z(i)*v(i)));
K1_z(i)= h*((lamda2)-(beta2*z(i)*v(i))-(d2*z(i)));
K1_w(i)= h*((beta2*z(i)*v(i))-(a2*w(i)));

%Step2
K2_x(i)= h*((lamda1)-(beta1*(x(i)+(K1_x(i))/2)*(v(i)+...
(K1_v(i))/2))-(d1*(x(i)+(K1_x(i))/2)));
K2_y(i)= h*((beta1*(x(i)+...
(K1_x(i))/2)*(v(i)+(K1_v(i))/2))-(a1*(y(i)+(K1_y(i))/2)));
K2_v(i)= h*((p1*(y(i)+(K1_y(i))/2))+(p2*(w(i)+...
(K1_w(i))/2))-(u*(v(i)+(K1_v(i))/2))-(beta1*(x(i)+...
(K1_x(i))/2)*(v(i)+(K1_v(i))/2))-...
(beta2*(z(i)+(K1_z(i))/2)*(v(i)+(K1_v(i))/2)));
K2_z(i)= h*((lamda2)-(beta2*(z(i)+...
(K1_z(i))/2)*(v(i)+(K1_v(i))/2))-(d2*(z(i)+(K1_z(i))/2)));
K2_w(i)= h*((beta2*(z(i)+...
(K1_z(i))/2)*(v(i)+(K1_v(i))/2))-(a2*(w(i)+(K1_w(i))/2)));

%Step3
K3_x(i)= h*((lamda1)-(beta1*(x(i)+(K2_x(i))/2)*(v(i)+...
(K2_v(i))/2))-(d1*(x(i)+(K2_x(i))/2)));
K3_y(i)= h*((beta1*(x(i)+...
(K2_x(i))/2)*(v(i)+(K2_v(i))/2))-(a1*(y(i)+(K2_y(i))/2)));
K3_v(i)= h*((p1*(y(i)+(K2_y(i))/2))+...
(p2*(w(i)+(K2_w(i))/2))-(u*(v(i)+(K2_v(i))/2))-...
(beta1*(x(i)+(K2_x(i))/2)*(v(i)+(K2_v(i))/2))-...
(beta2*(z(i)+(K2_z(i))/2)*(v(i)+(K2_v(i))/2)));
K3_z(i)= h*((lamda2)-(beta2*(z(i)+...
(K2_z(i))/2)*(v(i)+(K2_v(i))/2))-(d2*(z(i)+(K2_z(i))/2)));
K3_w(i)= h*((beta2*(z(i)+...
(K2_z(i))/2)*(v(i)+(K2_v(i))/2))-(a2*(w(i)+(K2_w(i))/2)));

```

```

%Step4
K4_x(i)= h*((lamda1)-(beta1*(x(i)+...
(K3_x(i)))*(v(i)+(K3_v(i))))-(d1*(x(i)+(K3_x(i)))));
K4_y(i)= h*((beta1*(x(i)+...
(K3_x(i)))*(v(i)+(K3_v(i))))-(a1*(y(i)+(K3_y(i)))));
K4_v(i)= h*((p1*(y(i)+...
(K3_y(i))))+(p2*(w(i)+(K3_w(i))))-(u*(v(i)+(K3_v(i))))-...
(beta1*(x(i)+(K3_x(i)))*(v(i)+(K3_v(i))))-...
(beta2*(z(i)+(K3_z(i)))*(v(i)+(K3_v(i)))));
K4_z(i)= h*((lamda2)-... (beta2*(z(i)+...
(K3_z(i)))*(v(i)+(K3_v(i))))-(d2*(z(i)+(K3_z(i)))));
K4_w(i)= h*((beta2*(z(i)+...
(K3_z(i)))*(v(i)+(K3_v(i))))-(a2*(w(i)+(K3_w(i)))));

%Kalkulasi
x(i+1) = x(i) + (1/6)*(K1_x(i) + (2*K2_x(i)) + ...
(2*K3_x(i)) + K4_x(i));
y(i+1) = y(i) + (1/6)*(K1_y(i) + (2*K2_y(i)) + ...
(2*K3_y(i)) + K4_y(i));
v(i+1) = v(i) + (1/6)*(K1_v(i) + (2*K2_v(i)) + ...
(2*K3_v(i)) + K4_v(i));
z(i+1) = z(i) + (1/6)*(K1_z(i) + (2*K2_z(i)) + ...
(2*K3_z(i)) + K4_z(i));
w(i+1) = w(i) + (1/6)*(K1_w(i) + (2*K2_w(i)) + ...
(2*K3_w(i)) + K4_w(i));

end

t=0:h:N*h;
plot(t,x,'r','LineWidth',2);
%   plot(t,y,'r','LineWidth',2);
%   plot(t,v,'r','LineWidth',2);
%   plot(t,z,'r','LineWidth',2);

```

```
%      plot(t,w,'r','LineWidth',2);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('Populasi (sel/ml)');
legend('x terhadap t');
%      legend('y terhadap t');
%      legend('v terhadap t');
%      legend('z terhadap t');
%      legend('w terhadap t');
grid on;
```


"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Muhammad Musa, lahir di Surabaya, 12 September 1993. Aku anak pertama dari 2 bersaudara. Sejak usia 9 tahun penulis suka kartun Chibi Maruko chan, Pokemon, dan Doraemon. Penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Siti Aminah Surabaya (1997-1999), SDN Kebonsari II/415 Surabaya (1999-2005), SMP Negeri 12 Surabaya (2005-2008), dan SMA Negeri 6 Surabaya (2008-2011). Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur SNMPTN dengan NRP 1211 100 070. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Pemodelan dan Simulasi Sistem. Selama menempuh pendidikan di ITS, penulis juga aktif berorganisasi di Lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS, Ibnu Muqhlah sebagai staf Departemen Syiar (2012-2013) dan Kepala Departemen Syiar (2013-2014). Disamping itu, pada semester V dan VI penulis terdaftar sebagai asisten dosen matakuliah kalkulus I dan kalkulus II.

Adapun untuk informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email muhammadmusa1209@gmail.com